УДК 519.21

О.Г. Кукуш, М.Я. Полеха / A.G. Kukush, M.Ya. Polekha

Київський національний університет ім.Тараса Шевченка

Механіко – математичний факультет

Конзистентна оцінка у векторній моделі з похибками у змінних при невідомій коваріаційній структурі похибок

Consistent estimator in multivariate errors-in-variables model under unknown error covariance structure

Анотація

A linear multivariate errors-in-variables model $AX \approx B$ is considered, where the data matrices A and B are observed with errors, and a matrix parameter X is to be estimated. In the situation of lack of information about error covariance structure, an estimator is proposed, which converges in probability to X, as the number of rows in A tends to infinity. Sufficient conditions for such convergence and for asymptotic normality of the estimator are found.

Розглянуто векторну модель з похибками у змінних $AX \approx B$, де матриці A, B спостерігаються з похибками і треба оцінити матричний параметр X. В умовах, коли немає достатньої інформації про коваріаційну структуру похибок, запропоновано оцінку, що збігається за ймовірністю до X, коли кількість рядків матриці A прямує до нескінченності. Знайдені достатні умови такої збіжності, а також достатні умови асимптотичної нормальності оцінки.

1. Вступ

Останнім часом інтенсивно розвивається теорія переозначених систем лінійних рівнянь виду $AX = B$, де матриці A і B спостерігаються з похибками, X - матричний параметр, який потрібно оцінити. Подібні задачі виникають при обробці результатів хімічних дослідів, обробці сигналів, ідентифікації динамічних систем тощо.

У ситуації, коли сукупна коваріаційна структура шуму відома з точністю до сталого множника, в [1, 2] встановлено консистентність оцінки повних найменших квадратів. У [3, 4] розглянуто випадок, коли коваріаційна структура похибок матриці A відома з точністю до одного множника, а подібна структура для матриці B відома з точністю до іншого множника. При цьому оцінку побудовано за другими емпіричними моментами на основі ідеї кластеризації. Вперше ця ідея застосовувалась у [5] для лінійної скалярної моделі з похибками у змінних, причому оцінка грунтувалась на моментах першого порядку. Ми також будемо використовувати ідею кластеризації та перші емпіричні моменти.

Будемо вживати наступні позначення: $\|A\|$ – норма Фробеніуса матриці A, I_p – одинична матриця розміру p, $\mathbf{E}$ – символ математичного сподівання, $\mathbf{tr}$ – слід матриці, $\lambda_{min}(V)$ та $\lambda_{max}(V)$ – найменше та найбільше власні значення матриці V, $O_p(1)$ – послідовність стохастично обмежених випадкових величин.

Стаття має наступну будову: у розділі 2 розглядається модель спостережень і будується оцінка. У розділі 3 доводиться її консистентність, коли кількість рядків матриці A прямує до нескінченності. Строгу консистентність та асимптотичну нормальність оцінки встановлено у розділах 4 та 5, а розділ 6 містить висновки.

2. Модель спостережень і побудова оцінки

Розглянемо модель:

$$AX \approx B, \tag{1}$$

де матриці $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ та $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ спостерігаються, а $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ – невідома матриця параметрів. Символічний запис (1) означає, що

$$A = \bar{A} + \tilde{A}, \quad B = \bar{B} + \tilde{B}, \quad \bar{A}X = \bar{B}, \tag{2}$$

де $\bar{A}$, $\bar{B}$ - невипадкові матриці, $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ - матриці, складені з похибок спостережень. Наша мета – побудувати консистентну оцінку матричного параметра X при $m \to \infty$, якщо немає достатньої інформації про коваріаційну структуру похибок.

Припустимо, що задано t незалежних копій моделі (1), $t \geq n$:

$$A(k)X \approx B(k), \; k = \overline{1, t}, \tag{3}$$

де $A(k) \in \mathbb{R}^{m(k) \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ та $B(k) \in \mathbb{R}^{m(k) \times p}$, $m(k)$ – деякі натуральні числа. Модель (3) означає наступне: спостерігаються матриці

$$A(k) = \bar{A}(k) + \tilde{A}(k), \quad B(k) = \bar{B}(k) + \tilde{B}(k), \quad 1 \leq k \leq t,$$

причому для невідомих невипадкових матриць $\bar{A}(k)$, $\bar{B}(k)$ виконується

$$\bar{A}(k)X = \bar{B}(k), \quad 1 \leq k \leq t.$$

Нехай $A(k) = [a_1(k), \; \ldots, \; a_{m(k)}(k)]^T$, $B(k) = [b_1(k), \; \ldots, \; b_{m(k)}(k)]^T$ і так само позначатимемо рядки матриць $\bar{A}(k)$, $\bar{B}(k)$, $\tilde{A}(k)$, $\tilde{B}(k)$. Оцінку матриці X будуємо, використовуючи перші емпіричні моменти спостережень. Нехай

$$a_c(k) = \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} a_i(k),$$

$$b_c(k) = \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} b_i(k),$$

$$A_c = [a_c(1),\ \ldots,\ a_c(t)]^T, \quad B_c = [b_c(1),\ \ldots,\ b_c(t)]^T.$$

Для спостережень $a_c(k)$, $b_c(k)$ маємо

$$a_c^T(k) X \approx b_c^T(k), \qquad 1 \le k \le t. \tag{4}$$

Для осередненої моделі (4) оцінку $\hat{X}$ будуємо звичайним методом найменших квадратів, нехтуючи наявністю похибок у спостереженнях $a_c(k)$:

$$\hat{X} := (A_c^T A_c)^{\dagger} A_c^T B_c. \tag{5}$$

Тут $W^{\dagger}$ є оберненою матрицею Мура – Пенроуза до матриці W [6, с.79].

3. Консистентність оцінки

Надалі кількість рядків $m(k)$ у матриці $A(k)$ буде необмежено зростати, тому наступні умови накладаються на рядки $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ з довільним $i \in \mathbb{N}$.

(i). $\mathbf{E}\tilde{a}_i(k) = 0,\ \mathbf{E}\tilde{b}_i(k) = 0,$ для будь-яких $i \ge 1$, $k = \overline{1,t}$.

(ii). Існує така стала c, що для довільних $i \ge 1$ та $k = \overline{1,t}$

$$\mathbf{E}\|\tilde{a}_i(k)\|^2 \le c, \quad \mathbf{E}\|\tilde{b}_i(k)\|^2 \le c.$$

(iii). Випадкові вектори $\{[\tilde{a}_i^T(k), \tilde{b}_i^T(k)],\ i \ge 1,\ 1 \le k \le t\}$ незалежні.

Позначимо $\bar{A}_c = [\bar{a}_c(1), \ldots, \bar{a}_c(t)]^T$, $m_{min} = min(m(1), \ldots, m(t))$.

Наступна умова забезпечує асимптотичну ідентифікованість осередненої моделі спостережень (4).

(iv). $\lambda_{min}(\bar{A}_c^T \bar{A}_c) \cdot m_{min} \to \infty$ при $m_{min} \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (i) - (iv). *Тоді оцінка (5) слабко консистентна, тобто* $\|\hat{X} - X\| \xrightarrow{p} 0$ *при* $m_{min} \to \infty$.

Доведення.

1°. *Невиродженість матриці* $A_c^T A_c$.

Аналогічно до матриці $\bar{A}_c$, будемо використовувати осереднені матриці $\tilde{A}_c$, $\tilde{B}_c$. Позначимо $V = \bar{A}_c^T \bar{A}_c$.

Маємо

$$A_c^T A_c = V + \tilde{A}_c^T \bar{A}_c + \bar{A}_c^T \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c.$$

З умови (iv) випливає, що $\bar{A}_c^T \bar{A}_c > 0$ при $m_{min} \geq m_0$. Тут і надалі нерівності для симетричних матриць вживатимемо в сенсі Львовнера [7, с.467]: $T > W$ означає, що $T - W$ додатно визначена, а $T \geq W$ – що $T - W$ невід'ємно визначена.

При $m_{min} \geq m_0$ маємо

$$A_c^T A_c \geq V^{1/2}(I_n + V^{-1/2}(\bar{A}_c^T \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T \bar{A}_c)V^{-1/2})V^{1/2}; \tag{6}$$

з умови (ii) отримуємо

$$E\|\tilde{A}_c\|^2 = \frac{O(1)}{m_{min}} \Rightarrow \|\tilde{A}_c\| = \frac{O_p(1)}{\sqrt{m_{min}}}.$$

Далі,

$$\|V^{-1/2}\bar{A}_c^T\| = \sqrt{tr(V^{-1/2}\bar{A}_c^T \bar{A}_c V^{-1/2})} = \sqrt{n},$$

$$\|V^{-1/2}\bar{A}_c^T \tilde{A}_c V^{-1/2}\| \leq \|V^{-1/2}\bar{A}_c^T\| \cdot \|\tilde{A}_c\| \cdot \|V^{-1/2}\| =$$

$$= \frac{O_p(1)}{\sqrt{m_{min}}} \cdot \|V^{-1/2}\| = \frac{O_p(1)}{\sqrt{\lambda_{min}(V) \cdot m_{min}}},$$

і за умовою (iv) це прямує до 0 за імовірністю при $m_{min} \to \infty$. Тоді $\|V^{-1/2}\tilde{A}_c^T \bar{A}_c V^{-1/2}\| = \|V^{-1/2}\bar{A}_c^T \tilde{A}_c V^{-1/2}\| \xrightarrow{p} 0$ при $m_{min} \to \infty$.

Отже, з (6) дістаємо, що матриця $A_c^T A_c$ невироджена з імовірністю, яка прямує до 1 при $m_{min} \to \infty$. Оскільки нас цікавить асимптотична поведінка оцінки (5), можемо вважати, що $A_c^T A_c$ невироджена, що призводить до спрощеного виразу для оцінки:

$$\hat{X} := (A_c^T A_c)^{-1} A_c^T B_c. \tag{7}$$

З (7) маємо після елементарних перетворень:

$$\hat{X} - X = V^{-1/2}(I_n + V^{-1/2}(R_1 + R_2)V^{-1/2})^{-1}V^{-1/2}\times$$
$$\times(R_3 + R_4 - R_1^{''}X - R_2 X), \tag{8}$$

де $R_1 =: \tilde{A}_c^T \bar{A}_c + \bar{A}_c^T \tilde{A}_c =: R_1^{'} + R_1^{''}$,

$R_2 =: \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c$, $\quad R_3 =: \bar{A}_c^T \tilde{B}_c$, $\quad R_4 =: \tilde{A}_c^T \tilde{B}_c$.

2°. *Збіжність залишків.*

Як ми бачили в п. 1°,

$\|V^{-1/2} R_1 V^{-1/2}\| \xrightarrow{p} 0$ при $m_{min} \to \infty$.

Далі, $\|R_2\| \le \|\tilde{A}_c\|^2 = \frac{O_p(1)}{m_{min}}$, тому

$$\|V^{-1/2} R_2 V^{-1/2}\| = \frac{O_p(1)}{\lambda_{min}(V) \cdot m_{min}} \xrightarrow{p} 0 \text{ при } m_{min} \to \infty.$$

Отже, при $m_{min} \to \infty$

$$(I_n + V^{-1/2}(R_1 + R_2)V^{-1/2})^{-1} \xrightarrow{p} I_n.$$

Аналогічно $\|V^{-1/2}\| \cdot \|V^{-1/2} R_3\| \xrightarrow{p} 0$, $\quad \|V^{-1/2}\| \cdot \|V^{-1/2} R_4\| \xrightarrow{p} 0$.

Шукана збіжність $\|\hat{X} - X\| \xrightarrow{p} 0$ при $m_{min} \to \infty$ випливає тепер із розкладу (8) та встановлених збіжностей залишків.

Зауваження 1. Основною умовою є умова (iv), але вона досить м'яка.

Справді, розглянемо одновимірний скалярний випадок n=p=1: $\bar{b}_i = x\bar{a}_i$, $b_i = \bar{b}_i + \tilde{b}_i$, $a_i = \bar{a}_i + \tilde{a}_i$, $i = \overline{1,m}$. Оцінка матиме вигляд:

$$\hat{x} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_i}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i} = x + \frac{V_m - xU_m}{1 + U_m},$$

де $V_m := (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{b}_i)(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i)^{-1}$, $U_m := (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_i)(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i)^{-1}$.

При однакових дисперсіях $\tilde{a}_i$ та однакових дисперсіях $\tilde{b}_i$, $V_m \xrightarrow{p} 0$ та $U_m \xrightarrow{p} 0$ тоді і лише тоді, коли $m \cdot (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{a}_i)^2 \to \infty$. Але це якраз і є умова (iv) у цьому скалярному випадку при t=1.

Зауваження 2. Умову (ii) можна замінити на слабшу:

$(ii)'$. $\frac{1}{m}\sum_{\left(\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le t}\right)} (\mathbf{E}\|\tilde{a}_i(k)\|^2 + \mathbf{E}\|\tilde{b}_i(k)\|^2) \le const.$

При цьому теорема залишатиметься в силі.

Зауваження 3. Умову (iii) можна легко послабити наступним чином.

$(iii).'$ Для кожного $k = \overline{1,t}$ послідовність випадкових векторів $\{[\tilde{a}_i^T(k),\ \tilde{b}_i^T(k)], i \ge 1\}$ є фінітно-залежною.

Нагадаємо, що фінітна залежність послідовності випадкових векторів $\{z_i\}$ означає існування такого номера s, що при кожному $j \ge 1$, системи векторів $\{z_i, i = \overline{1,j}\}$ та $\{z_i,\ i \ge j+s\}$ є незалежними. Умову $(iii)'$ можна використовувати в моделі зі структурними зв'язками [2] при невідомій коваріаційній матриці структурних параметрів.

Зауваження 4. Оцінку (5) можна застосовувати на практиці до моделі (2) наступним чином. Треба шукати розбиття матриці A на блоки

$$A = [A^T(1),\ A^T(2),\ \ldots,\ A^T(t)]^T,\ t = n,\ A(k) \in \mathbb{R}^{m(k)\times n},\ k = \overline{1,n},$$

так, щоб (з огляду на умову (iv)) $\Phi(m(1),\ldots,m(n)) := \lambda_{min}(A_c^T A_c)$ було максимальне. При цьому $m_{min} = min(m(1),\ \ldots,\ m(n))$ не повинно бути малим; можна вимагати, наприклад, $m_{min} \geq m/2n$. Звичайно, кількість блоків t можна задавати рівною $n+1, \ n+2$ тощо. Зазначимо, що при $t = n$ та невиродженій матриці A_c оцінка (5) спрощується: $\hat{X} = A_c^{-1} B_c$.

4. Строга консистентність

Посилимо умови (ii) та (iv). Вважатимемо, що числа $m(k)$ змінюються узгоджено:

$$m(k) = f_k(m), \ 1 \leq k \leq t, \ \text{де} \ f_k(m) \to \infty \ \text{при} \ m \to \infty, \ k = \overline{1,t}. \qquad (9)$$

(v). Для фіксованого дійсного $r > 1$ існує стала c така, що для всіх $i \geq 1$, та $k = \overline{1,t}$

$$\mathbf{E}\|\tilde{a}_i(k)\|^{2r} \leq c,$$

$$\mathbf{E}\|\tilde{b}_i(k)\|^{2r} \leq c.$$

(vi). Для фіксованого $m_0 \geq 1$ та r з умови (v), при $m(k) = f_k(m), \ k = \overline{1,t}$, виконується

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{\lambda_{max}^r(\bar{A}_c^T \bar{A}_c)}{\lambda_{min}^{2r}(\bar{A}_c^T \bar{A}_c) \cdot m_{min}^r} < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай числа* $m(k)$ *змінюються згідно (9) та виконані умови (i), (iii), (v) та (vi). Тоді оцінка (5) є строго консистентною, тобто* $\|\hat{X} - X\| \to 0$ *при* $m \to \infty$, *м.н.*

Доведення. Будемо розглядати $m \geq m_0$, для яких V – невироджена матриця. Почнемо з матриці

$$A_c^T A_c = V(I_n + V^{-1}(\bar{A}_c^T \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T \bar{A}_c + \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c)).$$

З моментної нерівності Розенталя [8] та умови (v) маємо

$$\mathbf{E}\|\tilde{A}_c\|^{2r} \le const \cdot m_{min}^{-r},$$

$$\mathbf{E}\|V^{-1}\bar{A}_c^T\tilde{A}_c\|^{2r} \le \|V^{-1}\|^{2r} \cdot \|\bar{A}_c\|^{2r} \cdot const \cdot m_{min}^{-r} \le const \cdot \frac{\lambda_{max}^r(V)}{\lambda_{min}^{2r}(V) \cdot m_{min}^r}.$$

Тому за умовою (vi)

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \mathbf{E}\|V^{-1}\bar{A}_c^T\tilde{A}_c\|^{2r} < \infty,$$

і за лемою Бореля- Кантеллі та нерівністю Чебишова $\|V^{-1}\bar{A}_c^T\tilde{A}_c\| \to 0$ при $m \to \infty$, м.н. Так само $\|V^{-1}\tilde{A}_c^T\bar{A}_c\| \to 0$ при $m \to \infty$, м.н. Також маємо

$$\mathbf{E}\|V^{-1}\tilde{A}_c^T\tilde{A}_c\|^{r} \le \|V^{-1}\|^{r} \cdot \mathbf{E}\|\tilde{A}_c\|^{2r} \le const \cdot \frac{1}{\lambda_{min}^r(V) \cdot m_{min}^r},$$

і з умови (vi) отримуємо

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \mathbf{E}\|V^{-1}\tilde{A}_c^T\tilde{A}_c\|^{r} < \infty.$$

Тому за лемою Бореля- Кантеллі $\|V^{-1}\tilde{A}_c^T\tilde{A}_c\| \to 0$ при $m \to \infty$, м.н.

Із встановлених збіжностей випливає, що м.н. при $m \to \infty$

$$A_c^T A_c = V(I_n + o(1)),$$

тому з імовірністю 1 матриця $A_c^T A_c$ невироджена, починаючи з деякого випадкового номера $m_1 = m_1(\omega)$, звідки $\hat{X} := (A_c^T A_c)^{-1} A_c^T B_c$.

Покладемо $\hat{\Delta} = \hat{X} - X$. При $m \ge m_1(\omega)$ матимемо

$$V^{-1}A_c^T A_c\hat{\Delta} = V^{-1}A_c^T\tilde{B}_c + V^{-1}(-\bar{A}_c^T\tilde{A}_c - \tilde{A}_c^T\tilde{A}_c)X. \tag{10}$$

У лівій частині отримуємо $V^{-1}A_c^T A_c \to I_n,\ m \to \infty$, м.н., а права частина прямує до нуля при $m \to \infty$, м.н. Це випливає із встановлених вище збіжностей, а також із збіжностей $\|V^{-1}\bar{A}_c^T\tilde{B}_c\| \to 0,$ $\|V^{-1}\tilde{A}_c^T\tilde{B}_c\| \to 0,\ m \to \infty,$ м.н., які доводяться аналогічно. Тому з (10) безпосередньо отримується шукане: $\|\hat{\Delta}\| \to 0,\ m \to \infty,$ м.н.

5. Асимптотична нормальність

У даному розділі також вважатимемо, що $m(k)$ змінюються згідно з (9). Більше того, нехай ці номери зростають регулярно у наступному сенсі.

(vii). При кожному $k = \overline{1,t}$ існує додатна і скінченна границя

$$\lambda_k := \lim_{m\to\infty} \frac{m}{f_k(m)}.$$

Також вимагатимемо стабілізації у середньому рядків матриці $\bar{A}_c$:

$(viii)$. $\bar{a}_c(k) \to \bar{a}_\infty(k)$ при $m \to \infty$, причому граничні вектори $\bar{a}_\infty(1), \ldots, \bar{a}_\infty(t)$ лінійно незалежні.

Нехай $\bar{A}_\infty = [\bar{a}_\infty(1), \ldots, \bar{a}_\infty(t)]^T$. Зауважимо, що за умови $(viii)$ матриця $V = \bar{A}_c^T\bar{A}_c$ прямуватиме до додатно визначеної матриці $V_\infty = \bar{A}_\infty^T\bar{A}_\infty$. Щодо похибок, вимагатимемо незалежності $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ та стабілізації (у середньому) коваріаційної структури.

(ix). Випадкові вектори $\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i,\ i \geq 1,\ k = \overline{1,t}\}$ є незалежними, причому існують границі

$$S_a(k) := \lim_{m(k)\to\infty} \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} \mathbf{E}\tilde{a}_i(k)\tilde{a}_i^T(k),$$

$$S_b(k) := \lim_{m(k)\to\infty} \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} \mathbf{E}\tilde{b}_i(k)\tilde{b}_i^T(k),$$

де $S_a(k),\ S_b(k)$ - додатно визначені матриці, $k = \overline{1,t}$.

Теорема 3. *Нехай числа* $m(k)$ *змінюються згідно з (9) та виконані умови (i), (vii) – (ix). Тоді при* $m \to \infty$

$$\sqrt{m} \cdot (\hat{X} - X) \xrightarrow{d} V_\infty^{-1} \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_\infty(k) \sqrt{\lambda_k} (\gamma_k^T \cdot S_a^{1/2}(k) X + \varepsilon_k^T \cdot S_b^{1/2}(k)) \text{ при } m \to \infty,$$

де $\{\gamma_k, \ \varepsilon_k, \ k = \overline{1,t}\}$ *- незалежні випадкові вектори,* $\gamma_k \sim N(0, I_n)$, $\varepsilon_k \sim N(0, I_p)$, $k = \overline{1,t}$.

Доведення.

З імовірністю, що прямує до 1 при $m \to \infty$, виконується $A_c^T A_c \hat{X} = A_c^T B_c$, тому

$$(I_n + o_p(1)) \sqrt{m} \hat{\Delta} = V^{-1} \sqrt{m} (-R_1'' X - R_2 X + R_3 + R_4), \tag{11}$$

де члени $R_i, \ R_1''$ такі самі, як в (8). Матриця $V^{-1} \to V_\infty^{-1}, \ m \to \infty$;

$$\sqrt{m} R_2 = \sqrt{m} \tilde{A}_c^T \tilde{A}_c = \frac{O_p(1)}{\sqrt{m}} \xrightarrow{p} 0, \ m \to \infty;$$

аналогічно $\sqrt{m} R_4 \xrightarrow{p} 0, \ m \to \infty.$ Залишилось дослідити збіжність членів R_1'' та R_3. Маємо

$$\sqrt{m} \cdot R_1'' = \sum_{k=1}^{t} \bar{a_c}(k) \sqrt{\frac{m}{m(k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m(k)}} \sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{a}_i{}^T(k).$$

Тут $\frac{m}{m(k)} \to \lambda_k,$ $m \to \infty$ і за центральною граничною теоремою (ЦГТ) у формі Ляпунова при $k = \overline{1,t}$

$$\frac{1}{\sqrt{m(k)}} \sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{a}_i(k) \xrightarrow{d} N(0, S_a(k)) \text{ при } m \to \infty.$$

Тому

$$\sqrt{m} \cdot R_1'' \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_\infty(k) \sqrt{\lambda_k} \cdot \gamma_k^T \cdot S_a^{1/2}(k),$$

де γ_k - випадкові вектори із твердження теореми 3. Нарешті,

$$\sqrt{m} \cdot R_3 = \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_c(k) \sqrt{\frac{m}{m(k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m(k)}} \sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{b_i}^T(k),$$

і знову за ЦГТ у формі Ляпунова при $k = \overline{1,t}$

$$\frac{1}{\sqrt{m(k)}} \sum_{i=1}^{m(k)} \tilde{b_i}(k) \xrightarrow{d} N(0, S_b(k)) \text{ при } m \to \infty.$$

Тому

$$\sqrt{m} \cdot R_3 \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{t} \bar{a}_\infty(k) \sqrt{\lambda_k} \cdot \varepsilon_k^T \cdot S_b^{1/2}(k),$$

де ε_k задані у твердженні теореми 3. Оскільки за умовою (ix) R_1'' та R_3 незалежні між собою, то з представлення (11) та леми Слуцького отримуємо шукану збіжність послідовності $\sqrt{m}\hat{\Delta}$. Доведення завершене.

Теорема 3 дозволяє на базі оцінки $\hat{X}$ будувати асимптотичні довірчі еліпсоїди для векторного параметра X . Для цього треба вміти консистентно оцінювати параметри граничного розподілу. Для λ_k наближенням є відношення $\frac{m}{m(k)}$ (у теоремі 3 можна в якості m узяти m_{min}); залишилося побудувати наближення для величин $\bar{a}_\infty(k),\ S_a(k)$ та $S_a(k)$ (наближенням для X є консистентна оцінка $\hat{X}$). Маємо

$$\bar{a}_\infty(k) \approx \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} \bar{a}_i(k) \approx a_c(k).$$

Тут і далі наближені рівності означають, що різниця між правою і лівою частинами є $o_p(1)$ при $m \to \infty$. За методом моментів маємо

$$S_b(k) \approx \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} b_i(k)(b_i^T(k) - a_i^T(k)\hat{X}),$$

$$S_a(k) \approx \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} a_i(k) a_i^T(k) - (\hat{X}\hat{X}^T)^\dagger \hat{X} \frac{1}{m(k)} \sum_{i=1}^{m(k)} b_i(k) a_i^T(k).$$

Останнє співвідношення отримано при умові, що X – матриця рангу n (зокрема, необхідно, щоб виконувалась нерівність $n \leq p$).

6. Висновки

Розглянуто векторну модель з похибками у змінних при відсутності інформації щодо коваріаційної структури похибок. Основним припущенням було те, що спостерігаються незалежні копії моделі. На практиці це означає, що дані спостережень можна розділити на відокремлені групи - кластери.

Проте в практичних задачах наявні певні відомості про структуру похибок. Подальші дослідження будуть спрямовані на те, щоб зменшити кількість кластерів, використовуючи додаткову апріорну інформацію. Іншим напрямом досліджень буде побудова критерію згоди для моделі (2), він буде узагальненням відповідного критерію для поліноміальної моделі з похибками у змінних [9].

Література

[1] *Kukush A. and Van Huffel S.* Consistency of element-wise weighted total least squares estimator in multivariate errors-in-variables model $AX = B$. - Metrika, 2004. vol.59, N.1.-p. 75-97.

[2] *Kukush A., Markovsky I. and Van Huffel S.* Consistency of the structured total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model. Journal of Statistical Planning and Inference, 2005. vol. 133, N. 2. -p. 315-358.

[3] *Kukush A., Markovsky I., and Van Huffel S.* Estimation in a linear multivariate measurement error model with clustering in the regressor. Internal Report 05-170. ESAT-SISTA. K.U.Leuven (Leuven, Belgium), 2005.

[4] *Markovsy I., Kukush A., and Van Huffel S.* On errors-in-variables estimation with unknown noise variance ratio. 14th IFAC Symposium on System Identification. Newcastle. Australia, 2006.

[5] *Wald A.* The fitting of straight lines if both variables are subject to error.- Ann. Math. Stat., 1940. no.11. -p. 284-300.

[6] *Себер Дж.* Линейный регресионный анализ. Мир, Москва, 1980. -с.456.

[7] *Маршал А., Олкин И.* Неравенства: теория и её приложения. Мир, Москва, 1983. -с.572.

[8] *Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelets, Approximation, and Statistical Applications. Springler - Verlang, New York, 1998. -p.244.

[9] *Cheng C.-L., Kukush A.* A goodness-of-fit test in a polinomial errors-in-variables model. УМЖ, 2004. т.56, N.4. с. 527-543.