ЦІНА КОШИКОВОГО ОПЦІОНУ*

О. Г. Кукуш, м. Київ

Присвячено вчителю Рудольфу Петровичу Ушакову, відважному лицарю Математики

На XIII Всеукраїнському турнірі юних математиків грала моя задача під назвою «Ціна опціону asket». Наведемо її умову.

Задача 1. Про невід'ємні числа p_{ijk}, де

$$1 \le i, j, k \le 3,$$

відомо, що кожна з подвійних сум

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ijk}, \quad \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}, \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} p_{ijk}$$

дорівнює 1. Для заданого числа $L > 0$ знайти найбільше і найменше значення виразу

$$S = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}\left(i + j + k - L\right)_{+}, \qquad (1)$$

де $a_{+} = \max(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

Кілька команд-учасниць турніру правильно розв'язали задачу, проте ніхто не зміг пояснити назву. У пропонованій статті ми розкриваємо цю таємницю.

1. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ «ДОДАТНА ЧАСТИНА ЧИСЛА x»

Означення 1. Додатною частиною дійсного числа x називають число

$$x_{+} = \max(x, 0) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Таким чином,

$$(-2{,}3)_{+} = 0, \ (1{,}7)_{+} = 0, \ (0)_{+} = 0.$$

Графік функції $f(x) = x_{+}$, $x \in \mathbb{R}$, наведено на *рис. 1*.

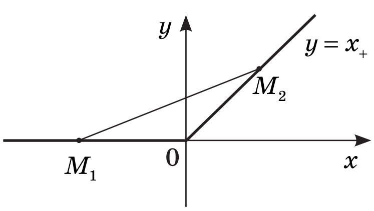

Рис. 1

* За матеріалами лекції, прочитаної у жовтні 2010 р. в м. Миколаєві для учасників XIII Всеукраїнського турніру юних математиків.

Нам знадобиться подання числа $\max(x, y)$ через модуль суми цих чисел.

Лема 1. Справедлива рівність

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}. \qquad (3)$$

Доведення. У випадку $x \ge y$ співвідношення (3) набуває вигляду

$$x = \frac{x + y + (x - y)}{2},$$

що справедливо. У випадку ж $x < y$ (3) має вигляд

$$y = \frac{x + y + (y - x)}{2},$$

що також правильно.

Наслідок 1. Справедливе подання

$$x_{+} = \frac{x + |x|}{2}, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Доведення. З рівностей (2), (3) маємо

$$x_{+} = \max(x, 0) = \frac{x + 0 + |x - 0|}{2} = \frac{x + |x|}{2}.$$

Вправа 1. Довести аналог рівності (3) для числа $\min(x, y)$. Потім, вивести формулу, аналогічну (4) для числа $x_{-} = -\min(x, 0)$. Перевірити, що $x = x_{+} - x_{-}$, $x \in \mathbb{R}$.

Вправа 2. Довести, що при $\lambda \ge 0$ виконується $(\lambda x)_{+} = \lambda x_{+}$, $x \in \mathbb{R}$.

Нагадаємо відому нерівність для модуля суми чисел.

Лема 2. Нехай $n \ge 1$, x_1, ..., x_n — дійсні числа.

Тоді

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|. \qquad (5)$$

Рівність у (5) досягається тоді й лише тоді, коли всі числа x_1, ..., x_n одного знака, тобто або

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ \ldots, \ x_n \ge 0, \qquad (6)$$

або

$$x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ \dots,\ x_n \le 0. \qquad (7)$$

Це твердження має прозоре геометричне тлумачення. Кожному числу $x \in \mathbb{R}$ поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{Ox}$ на числовій прямій. Тоді $|x| = \left|\overrightarrow{Ox}\right|$ — це довжина вектора $\overrightarrow{Ox}$. Нерівність (5) означає, що довжина суми векторів $\overrightarrow{Ox_i}$ не перевищує суми їх довжин:

$$\left|\overrightarrow{Ox_1} + \overrightarrow{Ox_2} + \ldots + \overrightarrow{Ox_n}\right| \le \left|\overrightarrow{Ox_1}\right| + \left|\overrightarrow{Ox_2}\right| + \ldots + \left|\overrightarrow{Ox_n}\right|.$$

Рівність досягається лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{Ox_i}$, $1 \le i \le n$, співнапрямлені (*рис. 2*).

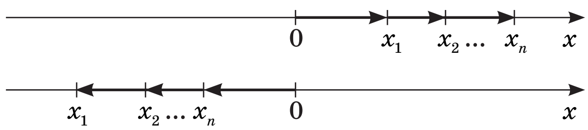

Рис. 2

Наслідок 2. Нехай $n \ge 1$. Тоді

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)_+ \le (x_1)_+ + (x_2)_+ + \ldots + (x_n)_+. \quad (8)$$

Рівність у (8) досягається тоді й лише тоді, коли числа x_1, ..., x_n одного знака, тобто виконується або (6), або (7).

Доведення. Згідно з (4), ліва частина (8) дорівнює

$$\frac{(x_1 + \ldots + x_n) + |x_1 + \ldots + x_n|}{2} \le$$

$$\le \frac{x_1 + \ldots + x_n + |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{2} = \qquad (9)$$

$$= \frac{x_1 + |x_1|}{2} + \frac{x_2 + |x_2|}{2} + \ldots + \frac{x_n + |x_n|}{2} =$$

$$= (x_1)_+ + \ldots + (x_n)_+ .$$

звідки випливає шукана нерівність.

Згідно з лемою 2, рівність у (9) досягається лише тоді, коли числа x_1, ..., x_n одного знака.

Наслідок 3. Функція $f(x) = x_+$, $x \in \mathbb{R}$, є опуклою.

Доведення. Скористаємося вправою 2, а також нерівністю (5) при $n = 2$. Маємо:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)_+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)_+ \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left((x_1)_+ + (x_2)_+\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Встановлена нерівність для середнього арифметичного значень функції f означає її опуклість.

Геометрично опуклість означає, що будь-яка січна M_1M_2 лежить або вище від графіка цієї функції, або на самому графіку (див. рис. 1). Для строго опуклої функції січна лежить вище від графіка; функція $y = x_+$, $x \in \mathbb{R}$, є опуклою в нестрогому сенсі, бо за певних положень точок M_1, M_2 (зокрема, коли вони лежать на від'ємній півосі абсцис) січна M_1M_2 лежить на графіку.

Наслідок 4. Нехай $n \ge 1$, λ_1, ..., λ_n — невід'ємні числа,

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)_+ \le$$

$$\le \lambda_1 (x_1)_+ + \lambda_2 (x_2)_+ + \ldots + \lambda_n (x_n)_+ . \qquad (10)$$

Доведення проведіть самостійно, використовуючи лему із вправи 2.

Зауважимо, що за додаткової умови

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 \qquad (11)$$

співвідношення (10) є нерівністю Єнсена для опуклої функції $y = x_+$.

Вправа 3. Довести, що в нерівності (10) рівність досягається лише тоді, коли всі числа з множини

$$\{x_i : 1 \le i \le n, \lambda_i > 0\}$$

мають однаковий знак.

2. ОЦІНКА ЗВЕРХУ СУМИ (1)

Нехай дотримано умови задачі 1. Розіб'ємо алгебраїчну суму

$$i + j + k - L = \left(i - \frac{L}{3}\right) + \left(j - \frac{L}{3}\right) + \left(k - \frac{L}{3}\right)$$

і використаємо (8) при $n = 3$. Маємо оцінку для виразу (1):

$$S \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}\left(\left(i-\frac{L}{3}\right)_+ + \left(j-\frac{L}{3}\right)_+ + \left(k-\frac{L}{3}\right)_+\right) =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3,$$

де

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3}\left[\left(i-\frac{L}{3}\right)_+ \cdot \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}\right)\right],$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{3}\left[\left(j-\frac{L}{3}\right)_+ \cdot \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} p_{ijk}\right)\right],$$

а суму S_3 ви напишіть самі. Замінивши подвійні суми з умови задачі на одиницю, маємо:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \sum_{i=1}^{3}\left(i-\frac{L}{3}\right)_+,$$

звідки

$$S \le 3\sum_{i=1}^{3}\left(i-\frac{L}{3}\right)_+ = \sum_{i=1}^{3}(3i-L)_+. \qquad (12)$$

Згідно із вправою 3, рівність у (12) досягається тоді й лише тоді, коли числа кожної трійки

$$i-\frac{L}{3},\ j-\frac{L}{3},\ k-\frac{L}{3}$$

мають однаковий знак за виконання нерівності $p_{ijk} > 0$. Зокрема це реалізується, коли $p_{ijk} = 0$, якщо не всі індекси i, j, k однакові. За цих умов подвійні суми з умови задачі дорівнюють відповідно p_{kkk}, p_{iii}, p_{jjj} і дорівнюють 1, тобто

$$p_{111} = p_{222} = p_{333} = 1,$$

а всі інші p_{ijk} дорівнюють нулю. Отже, найбільше значення суми S

$$S_{\max}(L) = (3-L)_+ + (6-L)_+ + (9-L)_+. \qquad (13)$$

Вправа 4. Якщо для фіксованого набору чисел $\{p_{ijk}\}$ виконується: при кожному $L>0$,

$$S = S_{\max}(L),$$

то $p_{111} = p_{222} = p_{333} = 1$, а решта p_{ijk} дорівнюють 0.

3. ОЦІНКА ЗНИЗУ СУМИ (1)

З умови задачі 1 випливає, що сума всіх чисел p_{ijk} дорівнює 3. З подальшого стане зрозумілим, що зручніше мати справу з ваговими коефіцієнтами, які задовольняють умову (11). Тому покладемо

$$q_{ijk} = \frac{p_{ijk}}{3},\ 1 \le i,j,k \le 3.$$

Тоді $q_{ijk} \ge 0$, і їх сума дорівнює 1. За нерівністю (10) маємо:

$$S = 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} q_{ijk}(i+j+k-L)_+ \ge \qquad (14)$$

$$\ge 3\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} q_{ijk}(i+j+k) - L\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} q_{ijk}\right)_+ =$$

$$= 3(T_1+T_2+T_3-L)_+,$$

де

$$T_1 = \sum_{i=1}^{3}\left[i \cdot \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} q_{ijk}\right)\right],$$

$$T_2 = \sum_{j=1}^{3}\left[j \cdot \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} q_{ijk}\right)\right],$$

а суму T_3 ви напишіть самі. З умови задачі дістанемо:

$$T_1 = T_2 = T_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{i}{3} = \frac{1+2+3}{3} = 2.$$

Отже,

$$S \ge 3(6-L)_+. \qquad (15)$$

Рівність тут досягається одночасно з рівністю в (14). Згідно із вправою 3, це буде лише тоді, коли всі числа $i+j+k-L$ мають однаковий знак за виконання нерівності $q_{ijk} > 0$. Зокрема це реалізується тоді, коли q_{123}, q_{231}, q_{312} додатні, а всі інші q_{ijk} дорівнюють 0, звідки

$$q_{123} = q_{231} = q_{312} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ijk} = \frac{1}{3}.$$

Отже, коли

$$p_{123} = p_{231} = p_{312} = 1, \qquad (16)$$

а решта p_{ijk} дорівнюють 0, то в (15) досягається рівність. Найменше значення S

$$S_{\min}(L) = 3(6-L)_+.$$

З огляду на рівність (13), задачу 1 повністю розв'язано.

Відповідь до задачі 1:

$$S_{\max}=(3-L)_++(6-L)_++(9+L)_+,$$

$$S_{\min}=3(6-L)_+.$$

Вправа 5. Нехай

$$p_{132}=p_{213}=p_{321}=1, \qquad (17)$$

а решта p_{ijk} дорівнюють 0. Перевірити, що в (15) досягається рівність. Чи є інші фіксовані набори $\{p_{ijk}\}$, крім (16) та (17), при яких для кожного $L>0$ в (15) досягається рівність?

4. ПОХІДНІ ЦІННІ ПАПЕРИ: ОПЦІОНИ КУПІВЛІ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ТИПУ

Для розуміння цього розділу знадобляться початкові відомості з теорії ймовірностей, див. [2], [3], більш докладно ринки інших паперів описано в [1].

На фінансовому ринку розглянемо найпростішу облігацію — банківський рахунок. На покладені у банк гроші за певний період часу нараховується постійний відсоток $100r\%$, $r>0$. Сума грошей на рахунку змінюється з часом за формулою складних процентів: маючи початковий капітал B_0, через T періодів вкладник буде мати на поточному рахунку капітал

$$B_T=B_0(1+r)^T.$$

Нехай на ринку є акції певного типу, вартість яких у момент $t\geq 0$ є випадковою величиною S_t. Вартість S_0 є невипадковою і нам відома.

Акції та облігації — це первинні цінні папери. У будь-який момент часу інвестор може купувати чи продавати акцію за ринковою ціною, а також класти в банк гроші чи їх позичати в банку — під однаковий відсоток $100r\%$ (таким є припущення нашої моделі ринку).

Опціон купівлі Європейського типу — це контракт, який дає право на купівлю цієї акції за фіксованою ціною K у фіксований момент часу T. Величину K називають страйковою ціною опціону, а T — це дата виконання опціону. Покупець контракту в момент $t=0$ виплачує його продавцю так звану опціонну премію C, яка є ціною опціону.

Розглянемо можливий прибуток «Покупця» в момент виконання T. Якщо ціна акції $S_T\leq K$, то «покупець» не скористається своїм правом на купівлю акції і його прибуток $g_T=0$. Якщо ж $S_T>K$, то «покупець» купує акцію у «продавця» за страйковою ціною K і одразу її перепродає на ринку за ціною S_T; його прибуток

$$g_T=S_T-K.$$

Обидва випадки описано формулою:

$$g_T=g_T(S_T)=(S_T-K)_+. \qquad (18)$$

Функцію g_T називають функцією виплат для заданого опціону. Так звану «справедливу» ціну опціону $C*$ описують за допомогою математичного сподівання:

$$C*=(1+r)^{-T}\cdot \boldsymbol{M}\left[g_T(S_T)\right],$$

$$C*=(1+r)^{-T}\cdot \boldsymbol{M}(S_T-K)_+. \qquad (19)$$

Тут математичне сподівання обернеться для «рівноважної» версії ринку, за якої акції в середньому ростуть пропорційно облігаціям. Для «рівноважного» ринку

$$M(S_t)=S_0(1+r)^t=S_0\cdot\frac{Bt}{B_0},\ \ t\geq 0.$$

Уявімо собі, що для «рівноважного» ринку ціна акції в момент T може набувати значень $x_1, \ldots, x_n$ з імовірностями $p_1, \ldots, p_n$ відповідно. За означенням математичного сподівання (див. [2], [3]) маємо:

$$C*=(1+r)^{-T}\sum_{i=1}^{n}p^i(x_i-K)_+.$$

Це нагадує вираз (1). Щоб отримати ще більш схожий вираз, розглянемо так званий кошиковий опціон, або опціон basket.

Нехай на фінансовому ринку крім облігацій є також N акцій різних типів, ціни яких у момент $t\geq 0$ описують випадковими величинами $S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(N)}$.

Кошиковий опціон купівлі Європейського типу — це контракт, який дає право на купівлю кошика з N акцій по одній акції кожного типу, при цьому ціна кошика є фіксованою і дорівнює L, купівлю можна здійснити лише у заданий момент часу T.

За аналогією з формулою (18) функція виплат кошикового опціону:

$$g_T = g_T\left(S_T^{(1)},\ldots,S_T^{(N)}\right) = \left(S_T^{(1)}+\ldots+S_T^{(N)}-L\right)_+.$$

За аналогією із (19), «справедлива» ціна такого опціону:

$$C^* = (1+r)^{-T}\cdot M\left(S_T^{(1)}+\ldots+S_t^{(N)}-L\right)_+. \quad (20)$$

Тут математичне сподівання взято для «рівноважної» версії ринку, за якої

$$M\left(S_t^{(i)}\right) = S_0(1+r)^t,\ 1\le i\le N,\ t\ge 0.$$

Виявляється, що вираз (1) описує «справедливу» ціну певного кошикового опціону.

Справді, нехай $N=3$ акцій у момент T можуть набувати лише значень 1, 2, 3, причому

$$q_{ijk} = \frac{1}{3}p_{ijk} = P\left(S_T^{(1)}=i, S_T^{(2)}=j, S_T^{(3)}=k\right),$$

$$1\le i,j,k\le 3.$$

Тут $P(A)$ — імовірність випадкової події A для «рівноважної» версії ринку. Зазначимо, що числа q_{ijk} дійсно можуть бути ймовірностями повної групи подій, бо ці числа невід'ємні, а їх сума дорівнює 1.

Тоді за формулою (20) маємо:

$$C^* = (1+r)^{-T}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} q_{ijk}(i+j+k-L)_+,$$

$$C^* = \frac{1}{3}(1+r)^{-T}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}(i+j+k-L)_+.$$

Як бачимо, це з точністю до сталого множника збігається з виразом (1).

З'ясуємо ймовірнісний зміст подвійних сум з умови задачі 1. Розглянемо

$$1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ijk} = 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P\left(S_T^{(1)}=i, S_T^{(2)}=j, S_T^{(3)}=k\right) =$$

$$= 3P\left(S_T^{(1)}\in\{1,2,3\}, S_T^{(2)}\in\{1,2,3\}, S_T^{(3)}=k\right).$$

Ми скористалися властивостями ймовірності. Але події

$$S_T^{(1)}\in\{1,2,3\},\ S_T^{(2)}\in\{1,2,3\}$$

виконуються завжди за наших припущень, тому маємо:

$$1 = 3P\left(S_T^{(3)}=k\right),\ P\left(S_T^{(3)}=k\right) = \frac{1}{3},\ k=1,2,3.$$

Аналогічно одержуємо:

$$P\left(S_T^{(1)}=i\right) = \frac{1}{3},\ P\left(S_T^{(2)}=j\right) = \frac{1}{3},\ 1\le i,\ j\le 3.$$

Отримані рівності означають, що ціни $S_T^{(1)}$, $S_T^{(2)}$, $S_T^{(3)}$ мають однакові ймовірнісні розподіли. Можна ще сказати, що ці ціни рівномірно розподілені по значеннях 1, 2, 3.

Отже, задачу 1 можна переформулювати так: яка найбільша та найменша «справедлива» ціна кошикового опціону на акції трьох типів? При цьому відомо, що в момент T ціни цих акцій рівномірно розподілено на значеннях 1, 2, 3, а страйкова ціна опціону дорівнює L.

У розділі 2 ми отримали, що ціна C^* найбільша, коли

$$q_{111} = q_{222} = q_{333} = \frac{1}{3},$$

а решта q_{ijk} дорівнюють 0. Це означає, що з імовірністю 1 виконується

$$S_T^{(1)} = S_T^{(2)} = S,$$

і тоді ціни змінюються абсолютно узгоджено: ріст однієї з них викликає ріст решти. Це нагадує вектори $\overrightarrow{Ox_i}$ з рис. 2, що «дивляться» в один бік.

Розділ 3 показує, що мінімум ціни C^* досягається, коли з імовірністю 1 усі три ціни акцій набувають різних значень; точніше, зустрічаються лише циклічні набори цін на кшталт (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), причому ці набори рівноймовірні. Тут випадкові величини $S_T^{(1)}$, $S_T^{(2)}$, $S_T^{(3)}$ нагадують вектори, що «дивляться» в різні боки.

5. МОЖЛИВІ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Автор упевнений, що узагальнення задачі 1 можуть бути темою учнівської роботи для Малої Академії Наук. Окреслимо можливі напрями дослідження.

а) Задачу можна ставити для кошика з N акцій, $N\ge 4$.

б) Можна розглядати опціони на N акцій із більш загальною функцією виплат виду

$$g_T = \varphi\left(\left(S_T^{(1)}+\ldots+S_T^{(N)}-L\right)_+\right),$$

де $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\varphi(0)=0$, φ — опукла функція.

в) Нехай $N=3$ і розглядається кошиковий опціон із п. 4. Нехай $S_T^{(1)}$ набуває трьох значень x_i, $1\le i\le 3$, $S_T^{(2)}$ набуває своїх трьох значень y_j, $1\le j\le 3$, і нарешті, $S_T^{(3)}$ набуває значень z_k, $1\le k\le 3$, причому

$$q_{ijk} = P\left(S_T^{(1)}=x_i, S_T^{(2)}=y_j, S_T^{(3)}=z_k\right).$$

Якщо записати «справедливу» ціну опціону, з'являється вираз

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} q_{ijk}\left(x_i+y_j+z_k-L\right)_+ .$$

Треба знайти його мінімум і максимум, коли q_{ijk} змінюються, але так, що

$$P\left(S_T^{(1)}=x_i\right)=P\left(S_T^{(2)}=y_j\right)=P\left(S_T^{(3)}=z_k\right)=\frac{1}{3},$$

для всіх i, j, k. Тут проблемним є знаходження мінімуму, і автор не знає прийнятної відповіді на поставлене питання.

Автор щиро вдячний професорові Яну Дене (Jan Dhene), Бельгія, за те, що він ознайомив мене з проблематикою кошикових опціонів, а також кандидатові фізико-математичних наук Володимиру Брайману, Київ, який підказав, як оцінювати знизу ціну опціону.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бондарев Б. В., Шурко И. Л.* Финансовая математика. — Донецк : Кассиопея, 1998. — 163 с.
2. *Тарнопольський В. Г., Васильченко В. Г.* Елементи теорії ймовірностей. — К. : Радянська школа, 1972.
3. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А., Высоцкий И. Р., Ященко И. В.* Теория вероятностей и статистика. — М. : МЦНМО, 2004. — 256 с.

■