Київський національний університет імені Тараса Шевченка

________________________механіко-математичний_______________________

Факультет / інститут

кафедра математичного аналізу

Назва кафедри

Укладач(і) : професор Радченко В.М.

вчене звання, прізвище та ініціали

Теорія міри та інтеграла

назва дисципліни

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

для студентів спеціальності 6.080300 „Математика" і „Статистика"

Затверджено
на засіданні кафедри
Протокол № ___
від „___" ___________20__р.
Зав. кафедри

_____________ _____________
Підпис *Прізвище, ініціали*

Декан факультету

_____________ _____________
Прізвище, ініціали

Затверджено
на засіданні вченої ради мех..-мат. ф-ту
Протокол № ___
від „___" ___________20__р.

Робоча навчальна програма з дисципліни "**теорія міри та інтеграла**".

Назва навчальної дисципліни

Укладач(і) д.ф.-м.н., професор Радченко Вадим Миколайович

науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по-батькові

Лектор(и): __д.ф.-м.н., професор Радченко В. М.________

Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали

Викладач(і): ___ д.ф.-м.н., професор Радченко В. М., к.ф.-м.н., доцент Денисьєвський М.О., к.ф.-м.н., доцент Константінов О.Ю., к.ф.-м.н.,ас. Брайман В.Б.

Науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали викладача(ів), який(і) веде(уть) семінарські, практичні, лабораторні заняття

Погоджено
з науково-методичною комісією
«____» _____________ 20__р.

____
Підпис голови НМК факультету/ інституту

ВСТУП

Дисципліна „теорія міри та інтеграла” є базовою нормативною дисципліною для студентів спеціальностей „математика” та „статистика”. Вона читається в V семестрі в обсязі 2 кредитів (за Європейською Кредитно-трансферною Системою ECTS), і розрахована на 192 години занять. З них 68 годин лекцій, 34 години практичних занять та 14 годин самостійної роботи. Семестр закінчується заліком та іспитом.

Мета і завдання навчальної дисципліни „теорія міри та інтеграла”: оволодіння теоретичними положеннями та деякими застосуваннями теорії міри та інтеграла Лебега, знайомство з просторами інтегрованих функцій, отримання теоретичної бази для використання інтеграла Лебега в інших математичних теоріях, , сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Предмет навчальної дисципліни „теорія міри та інтеграла”: міра Лебега, інтеграл Лебега, вимірні функції, простори інтегрованих функцій.

Вимоги до знань та вмінь студентів.

Студент повинен знати: основні поняття теорії міри Лебега, інтеграла Лебега, властивості вимірних та інтегрованих функцій, вимірних множин, основні твердження про збіжність інтегралів та вимірних функцій.

Студент повинен вміти: визначати значення інтеграла Лебега в різних випадках**,** обґрунтовувати граничний перехід в інтегралі Лебега та збіжність м.с. або за мірою послідовності функцій.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Спеціальна навчальна дисципліна „теорія міри та інтеграла” є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” спеціальностей „математика” та „статистика”, і використовується при вивченні курсів функціонального аналізу, теорії ймовірностей, рівнянь математичної фізики та інших.

Система контролю знань та умови складання іспиту. Навчальна дисципліна „теорія міри та інтеграла” оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона складається з 3 модулів.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною шкалою.

Модульний контроль: 2 модульні контрольні роботи, 1 колоквіум.

Змістовий модуль 1-20 балів;
- виконання лабораторних робіт (відвідування, активність студента на заняттях, виконання аудиторних та домашніх занять)-5;
- письмова контрольна робота -15;

Змістовий модуль 2-20 балів;
- виконання лабораторних робіт (відвідування, активність студента на заняттях, виконання аудиторних та домашніх занять) - 5;
- колоквіум-15;

Змістовий модуль 3-20 балів;
- виконання лабораторних робіт (відвідування, активність студента на заняттях, виконання аудиторних та домашніх занять) - 5;
- письмова контрольна робота -15;

Іспит - 40 балів.
Всього за семестр - 100 балів.

Мінімальна кількість балів для зарахування модульної контрольної роботи – 9 балів, для колоквіуму – 9 балів.

Кожна не зарахована контрольна робота може бути переписана один раз.

Колоквіум можна перескласти, якщо він був пропущений з поважної причини.

При цьому, кількість балів відповідає оцінці***:***
1-34 – «незадовільно» ***з обов'язковим повторним вивченням дисципліни***;
35-59 – «незадовільно» ***з можливістю повторного складання***;
60-64 – «задовільно» («***достатньо***») ;
65-74 – «задовільно»;
75 - 84 – «добре»;
85 - 89 – «добре» («***дуже добре***»);
90 - 100 – «відмінно».

Шкала відповідності

<table>
<tr><th>За 100-бальною шкалою</th><th colspan="3">Оцінка за національною шкалою</th></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>5</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>85 – 89</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>75 – 84</td></tr>
<tr><td>65 – 74</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60 – 64</td></tr>
<tr><td>35 – 59</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">незадовільно</td><td rowspan="2">не зараховано</td></tr>
<tr><td>1 – 34</td></tr>
</table>

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ теми	Назва теми	Кількість годин				
		лекції	лабораторні роботи	Самостійна робота	Контрольна модульна робота	Інші форми контр.
І семестр						
Змістовий модуль 1						
1	Основні класи множин.	6	2	2	6	
2	Продовження міри.	16	12	2	25	
Модульна контрольна робота 1						
Змістовий модуль 2						
3	Вимірні відображення та функції	12	6	3	20	
4	Побудова та основні властивості інтеграла Лебега	6	4	2	12	
Колоквіум						
Змістовий модуль 3						
5	Граничні теореми для інтеграла Лебега та їх застосування.	16	6	3	18	
6	Простори інтегровних функцій. Банахові та гільбертові простори	12	4	2	16	
Модульна контрольна робота 2						
Всього годин за семестр		68	34	14	99	

Змістовий модуль 1

Тема 1. Основні класи множин.

1. Кільце, алгебра, півкільце, півалгебра, σ–кільце, σ–алгебра, монотонний клас. Їхні приклади і властивості. — 2 год.
2. Мінімальні класи множин, що містять даний клас. Теорема про кільце, породжене півкільцем. — 2 год.
3. Борельові множини. Теорема про монотонний клас, породжений кільцем. — 2 год.

Практичне заняття 1. Класи множин — 2 год.

Тема 2. Продовження міри.

4. Основні класи функцій множин. Міра, елементарні властивості міри. Теореми про неперервність міри. — 2 год.
5. Теорема про міру Жордана як міру в сенсі нашого означення. Теорема про міру, породжену неспадною функцією на $\mathbf{R}$.— 2 год.
6. Продовження міри з півкільця на породжене кільце. Зовнішня міра та її основні властивості. Вимірність за Каратеодорі. — 2 год.
7. Теорема Каратедорі про клас вимірних множин. Повна міра. Повнота міри, визначеної в теоремі Каратеодорі. — 2 год.
8. Вимірність за Каратеодорі елементів вихідного кільця. Єдиність продовження міри з кільця на породжене σ–кільце. Наближення значень міри її значеннями на кільці. — 2 год.
9. Означення міри Лебега на $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^m$ та міри Лебега–Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Теорема про вимірність за Лебегом множин, вимірних за Жорданом. — 2 год.
10. Регулярні міри, регулярність міри Лебега та міри Лебега–Стілтьєса. Опис вимірних за Лебегом множин. — 2 год.
11. Означення та основні властивості зарядів. Теорема про розклад Гана. Теорема про розклад Жордана. Означення повної варіації. — 2 год.

Практичне заняття 2. Класи множин. Адитивні функції множин — 2 год.
Практичне заняття 3. Міра та її властивості — 2 год.
Практичне заняття 4. Зовнішня міра. Вимірні множини. Продовження міри — 2 год.
Практичне заняття 5. Міра Лебега на прямій — 2 год.
Практичне заняття 6. Міра Лебега в просторі $\mathbf{R}^m$ Міра Лебега-Стілтьєса на прямій — 2 год.
Практичне заняття 7. Контрольна робота — 2 год.

Самостійна робота — 30 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань).

Контрольні запитання і завдання.
1. Кільце, алгебра, півкільце, півалгебра, σ–кільце, σ–алгебра, монотонний клас. Їх приклади та властивості.
2. Мінімальні класи множин, що містять даний клас. Теорема про кільце, породжене півкільцем. Борельові множини.
3. Теорема про монотонний клас, породжений кільцем.
4. Основні класи функцій множин. Міра, елементарні властивості міри.
5. Теореми про неперервність міри.
6. Теорема про міру Жордана як міру в сенсі нашого означення.
7. Теорема про міру, породжену неспадною функцією на $\mathbf{R}$.
8. Продовження міри з півкільця на породжене кільце.
9. Зовнішня міра та її основні властивості.
10. Вимірність за Каратеодорі. Теорема Каратедорі про клас вимірних множин.
11. Повна міра. Повнота міри, визначеної в теоремі Каратеодорі. Вимірність за Каратеодорі елементів вихідного кільця.
12. Єдиність продовження міри з кільця на породжене σ-кільце. Наближення значень міри її значеннями на кільці.
13. Означення міри Лебега на $\mathbf{R}$. Існування невимірної множини.
14. Означення міри Лебега–Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Регулярність цієї міри.
15. Означення міри Лебега на $\mathbf{R}^m$. Теорема про вимірність за Лебегом множин, вимірних за Жорданом.
16 .Означення та основні властивості зарядів. Формулювання теореми про розклад Гана.
17. Теорема про розклад Жордана. Означення повної варіації.

Змістовий модуль 2

Тема 3. Вимірні відображення та функції

12. Вимірні відображення, означення та критерій. Критерій вимірності (дійсної) функції. Борельові функції, приклади. — 2 год.
13. Вимірність суперпозиції та векторної функції. Арифметичні дії над вимірними функціями. Вимірність $\sup, \inf, \limsup, \liminf, \lim$ послідовності вимірних функцій. — 2 год.
14. Прості вимірні функції. Апроксимація вимірних функцій простими. — 2 год.
15. Властивості, що виконуються майже скрізь. Збіжність майже скрізь, теореми про єдиність та про вимірність границі. Теорема Єгорова. — 2 год.
16. Збіжність за мірою, єдиність границі, метризація збіжності. Приклади про відсутність прямого зв'язку між збіжністю за мірою та збіжністю майже скрізь. Теорема Лебега про зв'язок між цими збіжностями. Теорема Лузіна (без доведення). — 2 год.
17. Фундаментальність за мірою. Лема Ріса. Наслідки леми Ріса. — 2 год.

Практичне заняття 8. Вимірні функції та їх властивості. — 2 год.
Практичне заняття 9. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь — 2 год.
Практичне заняття 10. Збіжність за мірою послідовності функцій — 2 год.

Тема 4. Побудова та основні властивості інтеграла Лебега

18. Означення інтеграла Лебега. Теорема про наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій. — 2 год.
19. Елементарні властивості інтеграла Лебега. σ–адитивність інтеграла Лебега як функції множин. — 2 год.
20. Подальші елементарні властивості інтеграла Лебега. Теорема про лінійність інтеграла для невід'ємних вимірних та для інтегровних функцій. — 2 год.

Практичне заняття 11. Означення інтеграла Лебега — 2 год.
Практичне заняття 12. Властивості інтеграла Лебега — 2 год.

Самостійна робота — 30 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань).

Контрольні запитання і завдання.
1. Вимірні відображення. Означення, основні властивості. Дійсні вимірні функції.
2.Суперпозиція вимірних відображень.
3. Властивості вимірних функцій. Теорема про наближення простими функціями.
4. Властивості, що виконуються майже скрізь. Збіжність майже скрізь, теореми про єдиність та про вимірність границі.
5. Теорема Єгорова.
6. Збіжність за мірою. Приклади про відсутність прямого зв'язку між збіжністю за мірою та збіжністю майже скрізь. Теорема Лебега про зв'язок між цими збіжностями.
7. Фундаментальність за мірою. Лема Ріса. Наслідки леми Ріса.
8. Означення інтеграла Лебега.
9. Теорема про наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій.
10. Елементарні властивості інтеграла Лебега.
11 σ-адитивність інтеграла Лебега як функції множин.
12. Подальші елементарні властивості інтеграла Лебега.
13. Теорема про лінійність інтеграла.

Змістовий модуль 3

Тема 5. Граничні теореми для інтеграла Лебега та їх застосування.

21. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. Теорема про монотонну збіжність. Теорема Б.Леві. Лема Фату. Теорема Лебега про мажоровану збіжність. — 2 год.
22. Порівняння інтеграла Рімана та інтеграла Лебега. Критерій Лебега інтегровності за Ріманом. Порівняння невласного інтеграла Рімана та інтеграла Лебега. Інтеграл Лебега–Стілтьєса на прямій. — 2 год.
23. Неперервність та диференційовність інтеграла Лебега, що залежить від параметра. Заміна змінної в інтегралі Лебега. — 2 год.
24. Абсолютна неперервність мір та зарядів. Теорема Радона–Никодима. — 2 год.
25. Теорема Лебега (про розклад міри на абсолютно неперервну та сингулярну частини). Абсолютно неперервні функції на прямій: основні властивості, зв'язок з зарядами, що абсолютно неперервні відносно міри Лебега. Функція Кантора. — 2 год.
26. Вимірні множини та функції в добутку просторів. — 2 год.
27. Добуток мір. — 2 год.
28. Подвійні та повторні інтеграли. Теорема Фубіні для невід’ємних вимірних та для інтегровних функцій. — 2 год.

Практичне заняття 13. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега
Практичне заняття 14. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега (продовження)
Практичне заняття 15. Заряди. Абсолютна неперервність і сингулярність.

Тема 6. Простори інтегровних функцій. Банахові та гільбертові простори

29. Нерівності Гельдера та Мінковського. Лінійні нормовані простори. Простір $L_p, 1 \le p < \infty$. Повнота простору L_p. Щільні підмножини L_p. — 2 год.
30. Банахові простори: означення та приклади. Ізоморфність скінченновимірних ЛНП. Еквівалентні норми. — 2 год.
31. Банахові простори $L_p, 1 \le p < \infty$. Банахові простори $l_p, 1 \le p < \infty$. Несепарабельний банахів простір l_∞. Приклад неповного лінійного нормованого простору. — 2 год.
32. Розмірність лінійного простору. Лема Ріса про майже перпендикуляр. Некомпактність кулі в нескінченновимірному просторі. — 2 год.
33. Гільбертів простір. Нерівність Шварца, тотожність паралелограма, поляризаційна тотожність та інші властивості скалярного добутку та гільбертового простору. — 2 год.
34. Підпростори, ортогональне доповнення. Теореми про існування проекції та ортогональний розклад гільбертового простору. Ортонормовані системи та

базиси, основні властивості. — 2 год.

Практичне заняття 16. Простори $L_p, 1 \le p < \infty$.

Практичне заняття 17. Контрольна робота

Самостійна робота — 30 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань).

Контрольні запитання і завдання.

1. Граничні теореми для інтеграла Лебега.
2. Порівняння інтеграла Рімана та інтеграла Лебега.
3. Критерій Лебега інтегровності за Ріманом
4. Порівняння невласного інтеграла Рімана та інтеграла Лебега. Інтеграл Лебега–Стілтьєса на прямій.
5. Неперервність та диференційовність інтеграла Лебега, що залежить від параметра. Заміна змінної в інтегралі Лебега.
6. Абсолютна неперервність мір та зарядів. Теорема Радона–Никодима. Теорема Лебега про розклад заряду.
7. Абсолютно неперервні функції. Функція Кантора.
8. Вимірні множини та функції в добутку просторів.
9. Добуток мір.
10. Подвійні та повторні інтеграли. Теорема Фубіні.
11. Нерівності Гельдера та Мінковського.
12. Лінійні нормовані простори. Простір $L_p, 1 \le p < \infty$. Повнота простору L_p.
13. Щільні підмножини L_p.
14. Банахові простори: означення та приклади. Банахові простори $L_p, 1 \le p < \infty$. Банахів простір $l_p, 1 \le p < \infty$.
15. Несепарабельний банахів простір l_∞. Приклад неповного лінійного нормованого простору. Розмірність лінійного простору.
16. Підпростори лінійних нормованих просторів. Теорема про "майже перпендикуляр". Некомпактність кулі в нескінченновимірному просторі.
17. Ізоморфізм лінійних нормованих просторів.
18. Простори зі скалярним добутком. Гільбертові простори: означення та приклади.
19. Ортогональність. Ортогональний розклад гільбертового простору.

Питання, які виносяться на іспит

1. Кільце, алгебра, півкільце, півалгебра, σ–кільце, σ–алгебра, монотонний клас. Їх приклади та властивості.
2. Мінімальні класи множин, що містять даний клас. Теорема про кільце, породжене півкільцем. Борельові множини.
3. Теорема про монотонний клас, породжений кільцем.
4. Основні класи функцій множин. Міра, елементарні властивості міри.
5. Теореми про неперервність міри.
6. Теорема про міру Жордана як міру в сенсі нашого означення.
7. Теорема про міру, породжену неспадною функцією на $\mathbf{R}$.
8. Продовження міри з півкільця на породжене кільце.
9. Зовнішня міра та її основні властивості.
10. Вимірність за Каратеодорі. Теорема Каратедорі про клас вимірних множин.
11. Повна міра. Повнота міри, визначеної в теоремі Каратеодорі. Вимірність за Каратеодорі елементів вихідного кільця.
12. Єдиність продовження міри з кільця на породжене σ-кільце. Наближення значень міри її значеннями на кільці.
13. Означення міри Лебега на $\mathbf{R}$. Існування невимірної множини.
14. Означення міри Лебега–Стілтьєса на $\mathbf{R}$. Регулярність цієї міри.
15. Означення міри Лебега на $\mathbf{R}^m$. Теорема про вимірність за Лебегом множин, вимірних за Жорданом.
16 .Означення та основні властивості зарядів. Формулювання теореми про розклад Гана.
17. Теорема про розклад Жордана. Означення повної варіації.
18. Вимірні відображення. Означення, основні властивості. Дійсні вимірні функції.
19.Суперпозиція вимірних відображень.
20. Властивості вимірних функцій. Теорема про наближення простими функціями.
21. Властивості, що виконуються майже скрізь. Збіжність майже скрізь, теореми про єдиність та про вимірність границі.
22. Теорема Єгорова.
23. Збіжність за мірою. Приклади про відсутність прямого зв'язку між збіжністю за мірою та збіжністю майже скрізь. Теорема Лебега про зв'язок між цими збіжностями.
24. Фундаментальність за мірою. Лема Ріса. Наслідки леми Ріса.
25. Означення інтеграла Лебега.
26. Теорема про наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій.
27. Елементарні властивості інтеграла Лебега.
28. σ-адитивність інтеграла Лебега як функції множин.
29. Подальші елементарні властивості інтеграла Лебега.
30. Теорема про лінійність інтеграла.

31. Граничні теореми для інтеграла Лебега.
32. Порівняння інтеграла Рімана та інтеграла Лебега.
33. Критерій Лебега інтегровності за Ріманом
34. Порівняння невласного інтеграла Рімана та інтеграла Лебега. Інтеграл Лебега–Стілтьєса на прямій.
35. Неперервність та диференційовність інтеграла Лебега, що залежить від параметра. Заміна змінної в інтегралі Лебега.
36. Абсолютна неперервність мір та зарядів. Теорема Радона–Никодима. Теорема Лебега про розклад заряду.
37. Абсолютно неперервні функції. Функція Кантора.
38. Вимірні множини та функції в добутку просторів.
39. Добуток мір.
40. Подвійні та повторні інтеграли. Теорема Фубіні.
41. Нерівності Гельдера та Мінковського.
42. Лінійні нормовані простори. Простір $L_p, 1 \le p < \infty$. Повнота простору L_p.
43. Щільні підмножини L_p.
44. Банахові простори: означення та приклади. Банахові простори $L_p, 1 \le p < \infty$. Банахів простір $l_p, 1 \le p < \infty$.
45. Несепарабельний банахів простір l_∞. Приклад неповного лінійного нормованого простору. Розмірність лінійного простору.
46. Підпростори лінійних нормованих просторів. Теорема про "майже перпендикуляр". Некомпактність кулі в нескінченновимірному просторі.
47. Ізоморфізм лінійних нормованих просторів.
48. Простори зі скалярним добутком. Гільбертові простори: означення та приклади.
49. Ортогональність. Ортогональний розклад гільбертового простору.

Список рекомендованої літератури

а) основна

1. Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла. — К.: Факт, 2007. — 164 с.
2. Халмош П. Теория меры. — М.: Изд-во „Факториал-пресс”, 2003. — 256 с.
3. Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1,2. — Москва-Ижевск; НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006. — 584 с. (Т. 1), 680 с. (Т. 2).
4. Березанский Ю. М., Ус Г.Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Курс лекций. — К.: Выща школа, 1990.— 600 с.

б) додаткова

5. Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла для студентів спеціальностей „математика і „статистика” механіко-математичного факультету / Укладачі А.Я.Дороговцев, С.Д.Івасішен, О.Ю.Константінов, О.Г.Кукуш, О.О.Курченко, О.Н.Нестеренко, Т.О.Петрова, А.В.Чайковський. — К.: ВПЦ „Київський університет”, 2003. — 89 с.
6. Методы решения задач по функциональному анализу: Учебное пособие / В.В.Городецкий, Н.И.Нагнибида, П.П.Настасиев. — К.: Выща школа., 1990. — 479 с.
7. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа.— М.: Наука, 1979.— 382 с.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974. — 480 с.
9. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983.— 344 с.
10. Федерер Г. Геометрическая теория меры: Пер. с англ.— М.: Наука, 1987.— 760 с.
11. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная (общая теория).— М: Наука, 1967.— 220 с.