КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З

ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

для студентів спеціальностей
"математика" і "статистика"
механіко–математичного факультету

Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
????

Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла для студентів спеціальностей "математика" і "статистика" механіко–математичного факультету / Укладачі О. Ю. Константинов, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, В. М. Радченко, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", ???? р. – 48 с.

Укладачі:
Константинов Олексій Юрійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент;
Кукуш Олександр Георгійович, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Курченко Олександр Олексійович, доктор фіз.-мат. наук, доцент;
Нестеренко Олексій Никифорович, кандидат фіз.-мат. наук;
Петрова Тамара Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент;
Радченко Вадим Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, професор (відповідальний за випуск);
Чайковський Андрій Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензенти:

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Цей збірник завдань для практичних занять з курсу "Теорія міри та інтеграла" є третім виданням методичного посібника, розробленого викладачами кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка і виданого в 1991 році та 2003 роках. Текст попереднього видання значно перероблено і пристосовано до діючої програми навчальної дисципліни.

Кожне заняття передбачає такі елементи:

1) підготовку студентами відповідей на контрольні питання по темі заняття;

2) розв'язування біля дошки під керівництвом викладача задач з частини А;

3) виконання студентами домашнього завдання з частини Б, яке складається зі спільної для всієї групи частини (відповідні задачі відмічені літерою Г) та індивідуальної (задачі з літерою І).

До складу завдань для кожного заняття включені також додаткові задачі, які відмічені літерою Д. Вони істотно доповнюють матеріал відповідного заняття і можуть пропонуватися студентам, які успішно впоралися з основною частиною завдань.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Богачев, В. И.* Основы теории меры : в 2 т. / В. И. Богачев. – 2-е изд. – М. ; Ижевск : РХД, 2006.

2. *Городецкий, В. В.* Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. – К. : Выща шк., 1990.

3. Действительный анализ в задачах / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. — М. : Физматлит, 2005.

4. *Дороговцев, А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. – 2-е изд. – К. : Факт, 2007.

5. *Дьяченко, М. И.* Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. – М. : Факториал, 1998.

6. *Кадец, В. М.* Курс функционального анализа / В. М. Кадец. – Х. : Харьковский нац. ун-т, 2006.

7. *Радченко, В. М.* Теорія міри та інтеграла / В. М. Радченко. – К. : Київський ун-т, 2012.

8. *Халмош П.* Теория меры / П. Халмош. – Москва: Факториал Пресс, 2003, 256 с.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

2^{X} — набір усіх підмножин X
$\forall$ — "для всіх", $\exists$ – "існує"
$:=$ – "покладемо рівним за означенням", "є рівним за означенням"
$|\mathsf{A}|$ – кількість елементів множини A
$\mathsf{A} \triangle \mathsf{B} = (\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}) \cup (\mathsf{B} \setminus \mathsf{A})$ – симетрична різниця множин A і B
$[a]$ – ціла частина a (найбільше ціле число, що не перевищує a)
$\{a\}$ – дробова частина a ($\{a\} = a - [a]$)
$\mathbb{C}(\mathsf{A})$ – набір функцій, неперервних на множині A
$\mathbb{AC}([a,b])$ – набір функцій, абсолютно неперервних на $[a,b]$
$\mathcal{B}(\mathsf{Y})$ – борельова σ-алгебра підмножин метричного простору Y
$f_+(x) = f(x)\mathrm{I}_{\{f \geq 0\}}(x), \quad f_-(x) = -f(x)\mathrm{I}_{\{f<0\}}(x)$
$f_n \xrightarrow{\lambda} f$ – функції f_n збігаються до функції f за мірою λ
$\|f\|_p = \left(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p}$
$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \{\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_2, \ \mathsf{A}_1 \in \mathcal{H}_1, \ \mathsf{A}_2 \in \mathcal{H}_2\}$, де $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – набори підмножин деяких просторів X_1 і X_2
$\mathcal{H} \cap \mathsf{B} = \{\mathsf{A} \cap \mathsf{B}, \ \mathsf{A} \in \mathcal{H}\}$, де $\mathcal{H}$ – набір підмножин X, $\mathsf{B} \subset \mathsf{X}$
$\mathrm{I}_{\mathsf{A}}(x)$ – функція, що дорівнює 1 при $x \in \mathsf{A}$ та дорівнює 0 при $x \notin \mathsf{A}$
$k(\mathcal{H}), \ a(\mathcal{H}), \ \sigma k(\mathcal{H}), \ \sigma a(\mathcal{H}), \ m(\mathcal{H})$ – відповідно кільце, алгебра, σ-кільце, σ-алгебра, монотонний клас, породжені набором множин $\mathcal{H}$
λ_d – міра Лебега в $\mathbb{R}^d$
λ_F – міра Лебега–Стілтьєса в $\mathbb{R}$, породжена функцією $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathsf{L}(\mathsf{A}, \lambda)$ – клас функцій, інтегровних на множині A за мірою λ
м. с. – майже скрізь
$\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел
$\nu \ll \lambda$ – заряд ν абсолютно неперервний відносно міри λ
$\nu \perp \lambda$ – заряд ν сингулярний відносно міри λ
$\mathcal{P}_d = \left\{\prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, \ b_k \in \mathbb{R}, \ a_k \leq b_k\right\}$ ($(c,d] = \varnothing$ для $c = d$)
$\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел
$\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$
$\mathcal{S}$ – σ-алгебра множин, вимірних за Каратеодорі
$\mathcal{S}_d$ – σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}^d$, вимірних за Лебегом
$\mathcal{S}_F$ – σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}$, вимірних за Лебегом–Стілтьєсом для функції $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел

ЗАНЯТТЯ 1
ОСНОВНІ КЛАСИ МНОЖИН

Контрольні запитання

1. *Означення кільця, алгебри, півкільця, σ-кільця, σ-алгебри та монотонного класу множин.*
2. *Означення породжених класів множин.*

А1

1. 1) Довести, що клас множин $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ [a,b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$ є півкільцем.
2) Чи є півкільцем клас множин $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ (a,b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$?

2. Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{R} \,|\,$принаймні одна з множин B чи $\mathbb{R} \setminus \mathsf{B}$ є не більш ніж зліченною$\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ – σ-алгебра.

3. Довести, що сукупність усіх обмежених підмножин прямої $\mathbb{R}$ утворює кільце, але не є ані σ-кільцем, ані σ-алгеброю.

4. Чи будуть монотонними класами набори множин:

$$1)\Big\{\{0\}, \Big[0, \frac{1}{n}\Big],\ n \geq 1\Big\}, \qquad 2)\Big\{\Big[0, \frac{1}{n}\Big),\ n \geq 1\Big\}, \qquad 3)\Big\{\varnothing,\ \Big(0, \frac{1}{n}\Big),\ n \geq 1\Big\}?$$

5. Нехай $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$. Визначити мінімальні кільце, алгебру, σ-кільце і σ-алгебру, які містять множину A.

6. Нехай X — деяка множина з не менш ніж трьома елементами, $\mathcal{H}$ — клас всіх таких підмножин X, що кожна з них складається з двох різних точок. Знайти $k(\mathcal{H})$ — кільце, породжене класом $\mathcal{H}$.

7. Нехай $\mathcal{H}$ – непорожній клас множин. Довести, що будь-яка множина з породженого кільця $k(\mathcal{H})$ може бути покрита скінченною кількістю множин з $\mathcal{H}$.

8. Верхньою (нижньою) границею послідовності множин $\{\mathsf{A}_n : n \geq 1\}$ називають множину $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n$ ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n$), яка складається з усіх тих елементів, котрі належать до нескінченної кількості множин A_n (до всіх множин, починаючи з деякого номера n).

1) Довести, що:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathsf{A}_k, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \mathsf{A}_k, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n.$$

2) Довести, що для монотонних послідовностей множин буде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n = \lim_{n\to\infty} \mathsf{A}_n.$$

3) Нехай $\forall n:\ \mathsf{A}_n \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ – σ-кільце. Довести, що тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{A}_n \in \mathcal{H}.$$

4) Чи буде твердження пункта 3) справедливим, якщо $\mathcal{H}$ – кільце?

Д1. Довести, що клас множин є кільцем, якщо він замкнений відносно операцій: 1) $\cup$ і $\triangle$; 2) $\cap$ і $\triangle$.

Д2. Навести приклад кільця, яке замкнене відносно операції зліченного перетину, але не є σ-кільцем.

Д3. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце підмножин X, $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, $f(\mathcal{K}) = \{f(\mathsf{B}) \mid \mathsf{B} \in \mathcal{K}\}$. Показати, що $f(\mathcal{K})$ не є, взагалі кажучи, кільцем підмножин Y.

Д4. Нехай $\mathcal{H}$ – деякий клас підмножин X, $\widetilde{\mathcal{H}}$ – сукупність індикаторів множин із $\mathcal{H}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем тоді і лише тоді, коли $\widetilde{\mathcal{H}}$ – алгебраїчне кільце відносно множення та додавання за модулем 2.

Д5. 1) Показати, що перетин двох півкілець не обов'язково є півкільцем. 2) Чи обов'язково є півкільцем об'єднання двох півкілець?

Д6. Довести, що нескінченне σ-кільце має потужність не менше континууму.

Б1

Г1. Нехай $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ і $\mathcal{H}$ – σ-кільце підмножин Y. Довести, що клас множин $f^{-1}(\mathcal{H}) = \big\{f^{-1}(\mathsf{A}) \mid \mathsf{A} \in \mathcal{H}\big\}$ є σ-кільцем підмножин X.

Г2. Показати, що клас множин, замкнений відносно операцій $\cup$ і $\cap$, не є, взагалі кажучи, кільцем.

Г3. Нехай $\mathcal{H}$ – непорожній клас множин. Довести, що будь-яка множина з породженого σ-кільця $\sigma k(\mathcal{H})$ може бути покрита зліченною кількістю множин з $\mathcal{H}$.

I1. З'ясувати, чи є півкільцем або кільцем клас множин $\mathcal{H}$, якщо:

1) $\mathcal{H} = \{\varnothing, [a,b) \mid a,\, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$;
2) $\mathcal{H} = \{\varnothing, [a,b) \mid a,\, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ a < b\}$;
3) $\mathcal{H} = \{\varnothing, (a,b] \mid a \in \mathbb{Q},\, b \in \mathbb{N},\ a < b\}$;
4) $\mathcal{H} = \{\varnothing, [a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;
5) $\mathcal{H} = \{\varnothing, (a,b] \mid a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$;
6) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ [a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q},\ a_i < b_i,\ i = 1,2\}$;
7) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ [a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ a_i < b_i,\ i = 1,2\}$;
8) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ (a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i = 1,2\}$;
9) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ [a_1,b_1) \times (a_2,b_2] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i = 1,2\}$;
10) $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i = 1,2\}$.

I2. 1) Навести приклад півкільця $\mathcal{P}$ підмножин $\mathsf{X} = \{1,2,3\}$, яке не є кільцем.

2) Навести приклад кільця $\mathcal{K}$ підмножин $\mathsf{X} = \{1,2,3\}$, яке не є алгеброю.
3) Навести приклад, який би свідчив, що об'єднання двох кілець не є, взагалі кажучи, кільцем.
4) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{R} \mid \text{принаймні одна з множин } \mathsf{B} \text{ чи } \overline{\mathsf{B}} \text{ скінченна}\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є алгеброю, але не є σ-алгеброю.
5) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{A} \subset \mathbb{N} \,:\, |\mathsf{A}| \le 2\}$, де $|\mathsf{A}|$ – число елементів множини A. Чи є $\mathcal{H}$ півкільцем? кільцем?
6) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{R} \mid \mathsf{B} \cap \mathbb{Q} - \text{скінченна множина}\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ – кільце, але не σ-кільце і не алгебра.
7) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{Q} \mid \mathsf{B} \cap \mathbb{N} - \text{скінченна множина}\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем, але не є ані σ-кільцем, ані алгеброю.
8) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{R} \mid \mathsf{B} \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) - \text{скінченна множина}\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем, але не є ані алгеброю, ані σ-кільцем.
9) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{Z} \mid \mathsf{B} - \text{скінченна множина}\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є кільцем, але не є ані алгеброю, ані σ-кільцем.
10) Нехай $\mathcal{H} = \{\mathsf{B} \subset \mathbb{N} \mid \overline{\mathsf{B}} - \text{скінченна множина}\}$. Чи є $\mathcal{H}$ півкільцем? кільцем?

I3. Знайти:

1) $k(\mathcal{H})$ і $\sigma k(\mathcal{H})$, якщо $\mathcal{H} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$;
2) $a(\mathcal{H})$ і $\sigma a(\mathcal{H})$, якщо $\mathcal{H} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$;
3) $m(\mathcal{H})$, якщо $\mathcal{H} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$;
4) $m(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{R},\ \mathcal{H} = \{[0, 2 - 1/n] \mid n \ge 1\}$;
5) $m(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{R},\ \mathcal{H} = \{[0, 3 + 1/n) \mid n \ge 1\}$;
6) $\sigma a(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{N}$, $\mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, ...\}$;
7) $k(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{N},\ \mathcal{H} = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, ...\}$;
8) $k(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{R},\ \mathcal{H} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$;
9) $\sigma k(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{R},\ \mathcal{H} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$;
10) $a(\mathcal{H})$, якщо $\mathsf{X} = \mathbb{R},\ \mathcal{H} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

I4. Знайти верхню та нижню границі послідовності множин $\{\mathsf{A}_n \,:\, n \ge 1\}$, якщо:

1) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} \mathsf{A}, & n = 3k-2, \\ \mathsf{B}, & n = 3k-1, \\ \mathsf{C}, & n = 3k; \end{cases}$

2) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} [0,1), & n \ne 2k, \\ [0,n], & n = 2k; \end{cases}$

3) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} (0, \operatorname{arctg} n), & n \ne 2k, \\ (-n^2, \ln n), & n = 2k; \end{cases}$

4) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} [-n, 0], & n \ne 2k, \\ [0,n], & n = 2k; \end{cases}$

5) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} (1, \operatorname{ch} n), & n \ne 2k, \\ (-\ln n, 4], & n = 2k; \end{cases}$

6) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} [n, n^2], & n \ne 2k, \\ [0, 1 + \ln n), & n = 2k; \end{cases}$

7) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} [-3^n, 0), & n \ne 2k, \\ (-n, -\sqrt{n}), & n = 2k; \end{cases}$

8) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} \left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, 4\right], & n \ne 2k, \\ [3, n+3], & n = 2k; \end{cases}$

9) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} [1, 2^n), & n \ne 2k, \\ (\ln n, +\infty), & n = 2k; \end{cases}$

10) $\mathsf{A}_n = \begin{cases} [-n, 0), & n = 3k-2, \\ \left(-1 - \dfrac{1}{n}, -1 + \dfrac{1}{n}\right), & n = 3k-1, \\ [0, n], & n = 3k, \end{cases}$

де $k \in \mathbb{N}$.

ЗАНЯТТЯ 2
ФУНКЦІЇ МНОЖИН. МІРА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення основних класів функцій множин.*
2. *Означення міри.*
3. *Властивості мір.*

А2

В задачах з А2 вважаємо, що $\mathcal{K}$ – кільце підмножин множини X, $\varphi : \mathcal{K} \to [0, +\infty]$ – невід'ємна адитивна функція множин.

1. Нехай $\{A, B, C\} \subset \mathcal{K}$ і $\varphi(A \cup B \cup C) < +\infty$. Довести, що:

1) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$;
2) $\varphi(A \cup B \cup C) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) - \varphi(A \cap B) - \varphi(A \cap C) - \varphi(B \cap C) + \varphi(A \cap B \cap C)$.
3) $\varphi(A \triangle B) \leq \varphi(A \triangle C) + \varphi(C \triangle B)$;
4) $|\varphi(A) - \varphi(C)| \leq \varphi(A \triangle C)$.

2. Нехай $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ A \in \mathcal{K}$. Довести такі твердження:

1) якщо $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A,\ n \in \mathbb{N}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \leq \varphi(A)$;
2) якщо $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \leq \varphi(A)$.

3. Довести, що φ – міра на $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли φ – σ-півадитивна функція на $\mathcal{K}$.

4. Довести, що функція φ є мірою на $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли вона неперервна знизу, тобто

$$\forall\ \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K},\ A_n \uparrow,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K} :\ \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

5. Нехай $x_0 \in X$ і $\forall\, E \subset X : \mu(E) = I_E(x_0)$. Довести, що μ – міра на σ-алгебрі 2^X.

6. Чи буде μ мірою на 2^X, якщо $\forall\, E \subset X :\ \mu(E) = |I_E(x_1) - I_E(x_2)|$?

7. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$. Довести, що $\mu\Big(\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n\Big) = 0$.

8. Нехай $\mathcal{H}$ – непорожній клас множин, μ – міра на породженому кільці $k(\mathcal{H})$ така, що $\mu(A) < +\infty$ для всіх $A \in \mathcal{H}$. Доведіть, що μ – скінченна міра на $k(\mathcal{H})$.

9. Нехай $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a, b] \mid 0 \leq a < b < +\infty\}$ і

$$\mu((a, b]) = \begin{cases} 0, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases} \qquad \mu(\varnothing) = 0.$$

Показати, що μ є адитивною, але не σ-адитивною функцією на півкільці $\mathcal{P}$.

Д1. Нехай $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$ і $\varphi(A \cup B) < +\infty$. Довести, що

$$|\varphi(A \cup B)\varphi(A \cap B) - \varphi(A)\varphi(B)| \leq \tfrac{1}{4}\varphi^2(A \cup B).$$

Д2. Нехай $\{\mu_n : n \geq 1\}$ – послідовність мір на кільці $\mathcal{K}$. Довести, що для довільної послідовності $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$ функція множин $\nu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ є мірою на $\mathcal{K}$.

Д3. Нехай μ – міра на σ-кільці $\mathcal{H}$.

1) Довести, що

$$\forall\ \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H} : \mu\Big(\varliminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

2) Нехай $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \mu\Big(\bigcup\limits_{i=n_0}^{\infty} A_i\Big) < +\infty$. Довести, що

$$\mu\Big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\Big) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

3) Навести приклад, коли виконуються тільки строгі нерівності.

Д4. Нехай μ – міра на σ-кільці $\mathcal{H}$, $E \in \mathcal{H}$, $\mu(E) < +\infty$, $\mathcal{H}_0$ – довільний клас множин, які попарно не перетинаються, $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. Довести, що сукупність $\{B \in \mathcal{H}_0 \mid \mu(B \cap E) \neq 0\}$ не більш, ніж зліченна.

Д5. Нехай μ – скінченна міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$. Множина $E \in \mathcal{F}$ називається *атомом* для μ, якщо $\mu(E) > 0$ і для будь-якої $A \subset E$, $A \in \mathcal{F}$ буде $\mu(A) = \mu(E)$ або $\mu(A) = 0$.

Нехай μ не має атомів. Довести, що існує множина $C \in \mathcal{F}$ така, що $C \neq \varnothing$, $\mu(C) = 0$.

Б2

Г1. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$. Довести, що клас множин:

1) $\mathcal{H} = \{\mathsf{A} \in \mathcal{F} \mid \mu(\mathsf{A}) < +\infty \text{ або } \mu(\overline{\mathsf{A}}) < +\infty\}$ є алгеброю
2) $\mathcal{H} = \{\mathsf{A} \in \mathcal{F} \mid \mu(\mathsf{A}) = 0\}$ є σ-кільцем;
3) $\mathcal{H} = \{\mathsf{A} \in \mathcal{F} \mid \mu(\mathsf{A}) = 0 \text{ або } \mu(\overline{\mathsf{A}}) = 0\}$ є σ-алгеброю;

Г2. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце, $\varphi : \mathcal{K} \to [0, +\infty)$ – невід'ємна адитивна функція множин. Довести, що функція φ є мірою на $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли вона неперервна зверху в $\varnothing$, тобто

$$\forall \{\mathsf{A}_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{K},\ \mathsf{A}_n \downarrow,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n = \varnothing : \lim_{n\to\infty} \varphi(\mathsf{A}_n) = 0.$$

Г3. Нехай μ – міра на півкільці $\mathcal{P}$. Чи правильні наступні твердження:

1) якщо μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{P}$, то μ – скінченна міра на $\mathcal{P}$;
2) якщо μ – скінченна міра на $\mathcal{P}$, то μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{P}$.

Чи правильні ці твердження, якщо $\mathcal{H}$ – кільце? якщо $\mathcal{H}$ – σ-алгебра?

І1. Нехай $\{x_1, x_2\} \subset \mathsf{X}$ і $x_1 \neq x_2$. Чи буде μ мірою на 2^{X}, якщо:

1) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = 2\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) - \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)$;
2) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = \Big(\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) - \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)\Big)^3$;
3) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)$;
4) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X},\ \mathsf{E} \neq \varnothing : \mu(\mathsf{E}) = 1 + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2),\ \mu(\varnothing) = 0$;
5) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = \Big(\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)\Big)^3$;
6) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1)\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)$;
7) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = 2\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) + 3\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)$;
8) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X},\ \mathsf{E} \neq \varnothing : \mu(\mathsf{E}) = 1 - \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1),\ \mu(\varnothing) = 0$;
9) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X},\ \mathsf{E} \neq \varnothing : \mu(\mathsf{E}) = 2 - \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) - \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2),\ \mu(\varnothing) = 0$;
10) $\forall \mathsf{E} \subset \mathsf{X} : \mu(\mathsf{E}) = \Big(\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)\Big)^2$;

І2. Нехай $\mathcal{A}$ – алгебра підмножин X, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – адитивна функція множин, $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\} \subset \mathcal{A}$ та відомі значення $\varphi(\mathsf{X})$, $\varphi(\mathsf{A})$, $\varphi(\mathsf{B})$, $\varphi(\mathsf{C})$, $\varphi(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$, $\varphi(\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$, $\varphi(\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$ і $\varphi(\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Знайти $\varphi(\mathsf{D})$, якщо D – сукупність усіх тих елементів, які:

1) належать тільки до множини A і не належать до B і C;
2) належать тільки до множин A і B і не належать до C;
3) належать принаймні до однієї з множин A, B і не належать до C;
4) належать тільки до однієї з множин A, B і не належать до C;
5) належать тільки до однієї з множин A, B, C;
6) належать тільки до двох з множин A, B, C;
7) належать до не більш ніж однієї з множин A, B, C;
8) не належать до жодної з множин A, B, C;
9) належать принаймні до двох із множин A, B, C;
10) належать не більше, ніж до двох із множин A, B, C.

ЗАНЯТТЯ 3
ЗОВНІШНЯ МІРА. ПРОДОВЖЕННЯ МІРИ

Контрольні запитання

1. *Означення зовнішньої міри.*
2. *Побудова зовнішньої міри за заданою мірою на півкільці.*
3. *Означення λ^*-вимірної множини.*
4. *Схема продовження міри за Каратеодорі.*

А3

1. Нехай λ_1^*, λ_2^* – зовнішні міри на 2^{X} і $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset [0, +\infty)$. Довести, що функція $\nu^* = \alpha_1\lambda_1^* + \alpha_2\lambda_2^*$ є зовнішньою мірою на 2^{X}.

2. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^{X}. Довести, що:

$$\forall \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\} \subset 2^{\mathsf{X}} : \lambda^*(\mathsf{A} \triangle \mathsf{B}) \leq \lambda^*(\mathsf{A} \triangle \mathsf{C}) + \lambda^*(\mathsf{C} \triangle \mathsf{B}).$$

3. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^{X} і $\mathcal{H} = \{\mathsf{A} \subset \mathsf{X} \mid \lambda^*(\mathsf{A}) = 0\}$. Довести, що $\mathcal{H}$ є σ-кільцем.

4. Нехай $\lambda^*(\varnothing) = 0$ і $\lambda^*(\mathsf{E}) = 1$ для всіх непорожніх $\mathsf{E} \subset \mathsf{X}$.

1) Довести, що λ^* – зовнішня міра. 2) Визначити σ – алгебру λ^*-вимірних множин.

5. Розглянемо півкільце $\mathcal{P}_1 = \{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{R},\ a \le b\}$, функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2\ , \\ 2, & x \ge 2, \end{cases}$$

і міру λ_F на $\mathcal{P}_1$ таку, що $\lambda_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. Довести, що:
1) кожна борельова множина є λ_F^*-вимірною;
2) $\lambda_F^*(\{1\}) = \lambda_F^*(\{2\}) = 1,\ \lambda_F^*(\{1,2\}) = 2$;
3) $\lambda_F^*(\mathbb{R}\backslash\{1,2\}) = 0$;
4) $\forall\, \mathsf{A} \subset \mathbb{R} : \lambda_F^*(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \{1,2\}|$ (кількість елементів множини $\mathsf{A} \cap \{1,2\}$);
5) будь-яка множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ є λ_F^*-вимірною.

6. Розглянемо міру λ на $\mathcal{P}_1$ таку, що $\lambda((a,b]) = b - a$. Нехай λ^* – зовнішня міра на $2^{\mathbb{R}}$, породжена мірою λ. Цю зовнішню міру називають зовнішньою мірою Лебега. Довести, що:
1) $\forall\, a \in \mathbb{R} : \lambda^*(\{a\}) = 0$;
2) Для будь-якої не більш ніж зліченної множини $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ вірно, що $\lambda^*(\mathsf{A}) = 0$.

7. Нехай $\mathsf{X} = \{1,2,3,4\},\ \mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}\}$ і функція $\mu : \mathcal{P} \to [0,+\infty)$ така, що $\mu(\varnothing) = 0, \quad \mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = 1, \quad \mu(\{3,4\}) = 2$.
1) Довести, що μ – міра на півкільці $\mathcal{P}$.
2) Побудувати зовнішню міру μ^*, породжену мірою μ.
3) Визначити σ-алгебру μ^*-вимірних множин та продовження міри μ на цю σ-алгебру.

Д1. Нехай λ^* – зовнішня міра на 2^{X}, для якої $\lambda^*(\mathsf{X}) < +\infty,\ \{\mathsf{A},\mathsf{B}\} \subset 2^{\mathsf{X}}$ і принаймні одна з множин A чи B є λ^*-вимірною. Довести, що

$$\lambda^*(\mathsf{A}) + \lambda^*(\mathsf{B}) = \lambda^*(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) + \lambda^*(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}).$$

Д2. Нехай μ – скінченна міра на алгебрі $\mathcal{A},\ \mu^*$ – зовнішня міра на 2^{X}, яка породжена мірою μ. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ є μ^*-вимірною тоді і лише тоді, коли $\mathsf{A} = \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$, де $\mathsf{B} \in \sigma a(\mathcal{A})$ і $\mu^*(\mathsf{C}) = 0$.

Д3. Нехай виконуються припущення із задачі Д2, $\overline{\mu}$ – це звуження μ^* на $\sigma a(\mathcal{A})$, і для множини $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ справджується умова

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \{\mathsf{B},\mathsf{C}\} \subset \sigma a(\mathcal{A}) : \mathsf{B} \subset \mathsf{A} \subset \mathsf{C},\ \overline{\mu}(\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}) < \varepsilon.$$

Довести, що множина A є μ^*-вимірною.

Д4. Нехай $\mathcal{F}$ – σ-алгебра і λ – σ-скінченна міра на $\mathcal{F}$. Покладемо

$$\mathcal{F}_1 := \{\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \in \mathcal{F},\ \mathsf{B} \subset \mathsf{C},\ \lambda(\mathsf{C}) = 0\}\,, \quad \lambda_1(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) := \lambda(\mathsf{A}).$$

Довести, що $\mathcal{F}_1$ – σ-алгебра і λ_1 – повна міра на $\mathcal{F}_1$.

Д5. Нехай $\mathcal{K}$ – кільце, $\mu_1,\ \mu_2$ – міри на $\sigma k(\mathcal{K})$, σ-скінченні на $\mathcal{K}$, і $\forall\, \mathsf{A} \in \mathcal{K} : \mu_1(\mathsf{A}) \le \mu_2(\mathsf{A})$. Довести, що

$$\forall\, \mathsf{A} \in \sigma k(\mathcal{K}) : \mu_1(\mathsf{A}) \le \mu_2(\mathsf{A}).$$

Д6. Нехай $\mathsf{X} = [0,1]^2,\ \mathcal{H}$ – клас горизонтальних і вертикальних замкнених прямокутників всередині X, у яких довжина або ширина дорівнює 1. Для довільного $\Pi \in \mathcal{H}$ через $\mu(\Pi)$ позначимо площу прямокутника Π. Вказати два різні продовження функції множин μ до міри на $\sigma a(\mathcal{H})$.

Д7. Нехай виконуються припущення із задачі Д2. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ є μ^*-вимірною тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \mathsf{B} \in \mathcal{A} : \mu^*(\mathsf{A} \triangle \mathsf{B}) < \varepsilon.$$

Б3

Г1. Нехай $\{x_1, x_2\} \subset \mathsf{X},\ x_1 \ne x_2$. Чи є зовнішньою мірою на 2^{X} функція множин λ^*, якщо для довільної множини $\mathsf{E} \subset \mathsf{X}$:

1) $\lambda^*(\mathsf{E}) = (1 + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1))(1 + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2))$; 2) $\lambda^*(\mathsf{E}) = \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1) - \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)$; 3) $\lambda^*(\mathsf{E}) = (1 + \mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_1))\mathrm{I}_{\mathsf{E}}(x_2)$.

Г2. Нехай λ^* і μ^* – зовнішні міри на 2^{X}. Довести, що $\eta^*(A) = \max\{\lambda^*(A), \mu^*(A)\}$, $A \subset \mathsf{X}$ теж є зовнішньою мірою на 2^{X}.

Г3. Нехай $\mathsf{X} = (0,1] \times (0,1]$, $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ (a,b] \times (0,1] \mid 0 \le a < b \le 1\}$, функція $\mu : \mathcal{P} \to [0,+\infty)$ така, що

$$\mu((a,b] \times (0,1]) = b - a,\ \mu(\varnothing) = 0.$$

Нехай, далі, μ^* – зовнішня міра, породжена мірою μ. Довести, що множина $(0,1] \times \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ не є μ^*-вимірною.

І1. Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, $\lambda_F : \mathcal{P}_1 \to [0,+\infty)$, $\lambda_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. Довести, що довільна множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ є λ_F^*-вимірною, та знайти $\lambda_F^*(\mathsf{A})$ для будь-якої $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$, якщо:

1) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<1,\\ 3, & 1\le x<2,\\ 11, & 2\le x<+\infty;\end{cases}$ 6) $F(x)=\begin{cases}-8, & -\infty<x<\pi,\\ 7, & \pi\le x<10,\\ 9, & 10\le x<+\infty;\end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases}-7, & -\infty<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi,\\ 8, & 2\pi\le x<+\infty;\end{cases}$ 7) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ [x], & 0\le x<5,\\ 10, & 5\le x<+\infty;\end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<-1,\\ 2, & -1\le x<1,\\ 5, & 1\le x<+\infty;\end{cases}$ 8) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ [x^2], & 0\le x<\sqrt{5},\\ 5, & \sqrt{5}\le x<+\infty;\end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases}-2, & -\infty<x<1,\\ 0, & 1\le x<3,\\ 3, & 3\le x<+\infty;\end{cases}$ 9) $F(x)=\begin{cases}-10, & -\infty<x<0,\\ [e^x], & 0\le x<2,\\ 10, & 2\le x<+\infty;\end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases}11, & -\infty<x<5,\\ 12, & 5\le x<7,\\ 15, & 7\le x<+\infty;\end{cases}$ 10) $F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<1,\\ [\ln x], & 1\le x<e^3,\\ 5, & e^3\le x<+\infty.\end{cases}$

I2. Перевірити, чи є функція множин λ^* зовнішньою мірою на 2^{X}. У випадку зовнішньої міри знайти клас усіх λ^*-вимірних множин.

1) $\mathsf{X}=\{x_1,x_2\},\ \lambda^*(\{x_1\})=\lambda^*(\{x_2\})=7,\ \lambda^*(\mathsf{X})=1,\ \lambda^*(\varnothing)=0;$
2) $\lambda^*(\varnothing)=0,\ \forall\,\mathsf{E}\subset\mathsf{X},\ \mathsf{E}\ne\varnothing:\lambda^*(\mathsf{E})=+\infty;$
3) $\mathsf{X}=\{1,2\},\ \lambda^*(\{1\})=\lambda^*(\{2\})=1,\ \lambda^*(\mathsf{X})=5,\ \lambda^*(\varnothing)=0;$
4) $\mathsf{X}=\{1,2\},\ \lambda^*(\{1\})=\lambda^*(\{2\})=\lambda^*(\mathsf{X})=5,\ \lambda^*(\varnothing)=0;$
5) $\mathsf{X}=\{1,2,3\},\ \lambda^*(\{1\})=\lambda^*(\{2\})=\lambda^*(\{1,2\})=1,\ \lambda^*(\{3\})=2,\ \lambda^*(\{1,3\})=\lambda^*(\{2,3\})=\lambda^*(\mathsf{X})=3,\ \lambda^*(\varnothing)=0;$
6) $\mathsf{X}=\{1,2,3\},\ \lambda^*(\{1\})=\lambda^*(\{3\})=\lambda^*(\{1,3\})=2,\ \lambda^*(\{2\})=5,\ \lambda^*(\{1,2\})=\lambda^*(\{2,3\})=\lambda^*(\mathsf{X})=7,\ \lambda^*(\varnothing)=0;$
7) X – нескінченна, $\lambda^*(\mathsf{E})=0$ для скінченних $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$, $\lambda^*(\mathsf{E})=1$ для нескінченних $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$;
8) X – нескінченна, $\lambda^*(\mathsf{E})=0$ для скінченних $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$, $\lambda^*(\mathsf{E})=+\infty$ для нескінченних $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$;
9) X – незлічена, $\lambda^*(\mathsf{E})=0$ для скінченних та злічених $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$, $\lambda^*(\mathsf{E})=1$ для незлічених $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$;
10) X – незлічена, $\lambda^*(\mathsf{E})=0$ для скінченних та злічених $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$, $\lambda^*(\mathsf{E})=+\infty$ для незлічених $\mathsf{E}\subset\mathsf{X}$.

ЗАНЯТТЯ 4
МІРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМІЙ

Контрольні запитання

1. *Побудова міри Лебега на $\mathbb{R}$.*
2. *Різні визначення σ-алгебри борельових множин в $\mathbb{R}$.*

А4

У наступних задачах через λ_1 позначено міру Лебега на $\mathbb{R}$.

1. Довести, що множина $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}$ є борельовою, та знайти $\lambda_1(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A}=(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1];$ 3) $\mathsf{A}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\in\mathbb{Q}\right\};$
2) $\mathsf{A}=[a,b),\ a<b;$ 4) $\mathsf{A}=[a,+\infty);$

2. Довести, що множина A борельова та обчислити $\lambda_1(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big[n+\dfrac{1}{2^{n+1}},n+\dfrac{1}{2^n}\Big];$ 3) $\mathsf{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\big[\operatorname{arctg}n,n\big)\backslash\mathbb{Q}\Big);$

2) $\mathsf{A}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\sin n-\dfrac{1}{n},\sin n+\dfrac{1}{n}\Big);$ 4) $\mathsf{A}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\big(-n-\sin n,n+\cos n\big)\bigcap\mathbb{Q}.$

3. Нехай $\mathsf{A}\subset[a,b]$, і $\lambda_1(\mathsf{A})=p$. Довести, що для будь-якого $q\in[0,p]$ існує $\mathsf{A}_q\subset\mathsf{A}$ така, що $\lambda_1(\mathsf{A}_q)=q$.

4. Нехай $\mathsf{A}\subset[a,b]$, A – замкнена в $\mathbb{R}$ множина і $\lambda_1(\mathsf{A})=b-a$. Довести, що $\mathsf{A}=[a,b]$.

5. Розглядається множина A всіх чисел з $[0,1]$, в десятковому записі яких немає жодної одиниці.
1) Довести, що множина A борельова. 2) Знайти $\lambda_1(\mathsf{A})$.

6. Канторова множина D будується таким чином: з відрізка $[0,1]$ вилучається інтервал $(1/3,\ 2/3)$; потім з двох відрізків, що залишилися, вилучаються інтервали з довжинами $(1/3)^2$ з центрами в серединах цих відрізків; далі з чотирьох відрізків, які залишились, вилучаються інтервали з довжинами $(1/3)^3$ з центрами в серединах цих відрізків і т. д. Множину, що залишилася після вилучення всіх цих інтервалів, називають канторовою множиною. Довести, що канторова множина D:

1) є борельовою множиною і $\lambda_1(\mathsf{D}) = 0$; 2) має потужність континууму; 3) є вимірною за Жорданом.

7. Нехай c – потужність континууму. Довести, що σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин $\mathbb{R}$ має потужність 2^c.

8. Нехай μ – міра на борельових підмножинах $[0,1]$ така, що $\mu([0,1]) = 1$ і $\mu(\mathsf{A}) = \mu(\mathsf{B})$ для довільних множин A, $\mathsf{B} \in \mathcal{B}([0,1])$, що відрізняються лише зсувом. Довести, що $\mu = \lambda_1$ на $\mathcal{B}([0,1])$.

Д1. Нехай $\alpha \in (0,1)$. Довести існування ніде не щільної множини $\mathsf{A}_\alpha \subset [0,1]$ такої, що $\lambda_1(\mathsf{A}_\alpha) = \alpha$.

Д2. Нехай $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$, $\lambda_1(\mathsf{A}) > 0$ і $\alpha \in (0,1)$. Довести існування такого інтервалу (a,b), що

$$\lambda_1(\mathsf{A} \cap (a,b)) \geq \alpha\lambda_1((a,b)).$$

Д3. Нехай $\mathsf{A} \subset [0,1]$, $\lambda_1(\mathsf{A}) > 0$.

1) Довести, що існують $x,\ y \in \mathsf{A}$ такі, що $x - y$ – ірраціональне число.
2) Довести, що існують $x,\ y \in \mathsf{A}$ такі, що $x - y$ – раціональне число.
3) Довести існування такого $\varepsilon > 0$, що $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \{x - y \mid x \in \mathsf{A},\ y \in \mathsf{A}\}$.

Д4. Показати, що на прямій існує така борельова множина B, що для будь-якого непорожнього інтервалу J обидві множини $\mathsf{J} \cap \mathsf{B}$ і $\mathsf{J} \setminus \mathsf{B}$ мають додатні міри Лебега.

Б4

Г1. Нехай A – вимірна за Лебегом множина на прямій, причому A має принаймні одну внутрішню точку. Довести, що $\lambda_1(\mathsf{A}) > 0$.

Г2.1)Для заданого $n \geq 2$ побудувати множини $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \subset [0,1]$ такі, що
$$\sum_{k=1}^n \lambda_1(\mathsf{A}_k) = n - 1 \quad \text{і} \quad \bigcap_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A_k} = \varnothing.$$

2) Для множин $\mathsf{B}_1,\ \ldots,\ \mathsf{B}_n \subset [0,1]$ відомо, що $\sum_{k=1}^n \lambda_1(\mathsf{B}_k) > n - 1$. Довести, що $\bigcap_{k=1}^n \mathsf{B}_k \neq \varnothing$.

Г3. Розглядається множина A всіх чисел з $[0,1]$, в десятковому записі яких на всіх парних місцях стоять нулі.

1) Довести, що множина A борельова. 2) Знайти $\lambda_1(\mathsf{A})$.

І1. Довести, що множина A борельова, та обчислити $\lambda_1(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = [-5, +\infty)\backslash\mathbb{N}$;
2) $\mathsf{A} = [2,5)\backslash[3,6]$;
3) $\mathsf{A} = [2,5) \cup [3,6]$;
4) $[-8, +\infty) \cap \mathbb{Z}$;
5) $\mathsf{A} = \mathbb{Q}\backslash[5,10]$;
6) $\mathsf{A} = [0,10]\backslash(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{N})$;
7) $\mathsf{A} = \{x \in [-2\pi, 2\pi] \mid \cos 2x > 0\}$;
8) $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{arctg} x > 1\}$;
9) $\mathsf{A} = \left\{x \in [0,3] \mid x^4 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right\}$;
10) $\mathsf{A} = \{x > 0 \mid \sin(1/x) < 0\}$.

І2. Довести, що множина A борельова, та обчислити $\lambda_1(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$;
2) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{e^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$;
3) $\mathsf{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \operatorname{arctg} n\right)\backslash\mathbb{Q}$;
4) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}\right]$;
5) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[3^n, 3^n + \frac{1}{3^n}\right)\backslash\mathbb{Q}$;
6) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(n+2)}, \frac{1}{\ln(n+1)}\right]$;
7) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big[\ln n, \ln(n+1)\Big]\backslash\mathbb{Z}$;
8) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^2 - \frac{\pi}{3^{n+5}}, n^2 + \frac{\pi}{3^{n+5}}\right]$;
9) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[-n^{-n}, \frac{1}{\ln(n+1)}\right] \bigcap \mathbb{Q}$;
10) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[n^3 - \frac{1}{5^n}, n^3 + \frac{1}{5^n}\right)\backslash\mathbb{Q}$.

ЗАНЯТТЯ 5
МІРА ЛЕБЕГА В ПРОСТОРІ $\mathbb{R}^d$

Контрольні запитання

1. *Побудова міри Лебега на $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.*
2. *Різні визначення σ-алгебри борельових множин в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.*

А5

В наступних задачах через λ_d позначено міру Лебега в $\mathbb{R}^d$.

1. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^2$ є борельовою і $\lambda_2(\mathsf{A}) = 0$, якщо:

1) $\mathsf{A} = \{a\},\ a \in \mathbb{R}^2$;
2) A – зліченна множина;
3) $\mathsf{A} = \{a\} \times (b,c],\ \{a,b,c\} \subset \mathbb{R}$;
4) $\mathsf{A} = \{a\} \times \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$.

2. 1) Нехай A – підмножина довільної прямої в $\mathbb{R}^2$. Довести, що $\lambda_2(\mathsf{A}) = 0$.
2) Нехай A – підмножина довільної площини в $\mathbb{R}^3$. Довести, що $\lambda_3(\mathsf{A}) = 0$.

3. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^2$ є борельовою, та знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = [a,b] \times [c,d]$; 3) $\mathsf{A} = (a,b] \times (c,+\infty)$;
2) $\mathsf{A} = (a,b) \times [c,d]$; 4) $\mathsf{A} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

4. Нехай $f \in \mathbb{C}([a,b]),\ f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$,

$$\mathsf{A} = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq f(x),\ x \in [a,b]\}, \quad \mathsf{B} = \{(x,f(x)) \mid x \in [a,b]\}.$$

Довести, що A і B – борельові множини в $\mathbb{R}^2$, і

$$\lambda_2(\mathsf{A}) = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad \lambda_2(\mathsf{B}) = 0.$$

5. Нехай

$$\mathsf{A}_n = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq (x-n)^n/n,\ x \in [n,n+1]\}, \quad \mathsf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n.$$

1) Довести, що множина A борельова. 2) Знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$.

6. Розглядається множина A точок $(x,y) \in [0,\pi]^2$, таких, що $\sin x < 1/2$, а $\cos(x+y)$ ірраціональний.
1) Довести, що множина A борельова. 2) Знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$.

7. Нехай F – замкнена підмножина $\mathbb{R}^d$, $\lambda_d(\mathsf{F}) = 0$. Довести, що F ніде не щільна в $\mathbb{R}^d$ (Тобто, для будь-якої кулі $\mathsf{B} \subset \mathbb{R}^d$ існує куля $\mathsf{B}_1 \subset (\mathsf{B} \setminus \mathsf{F})$).

8. Нехай $a \in \mathbb{R}^d,\ T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – невироджене лінійне перетворення, m – міра Жордана в $\mathbb{R}^d$. Довести, що:
1) для довільної множини $\mathsf{E} \subset \mathbb{R}^d$, вимірної за Жорданом, $\mathsf{m}(T\mathsf{E} + a) = |\det T|\mathsf{m}(\mathsf{E})$;
2) для довільної множини $\mathsf{E} \subset \mathbb{R}^d$ $\lambda_d^*(T\mathsf{E} + a) = |\det T|\lambda_d^*(\mathsf{E})$;
3) для довільної множини $\mathsf{E} \subset \mathbb{R}^d$, вимірної за Лебегом, $\lambda_d(T\mathsf{E} + a) = |\det T|\lambda_d(\mathsf{E})$;
4) обґрунтувати, що λ_d інваріантна відносно паралельних переносів і поворотів.

Д1. 1) Довести, що будь-яка опукла підмножина $\mathbb{R}^2$ вимірна за Лебегом.
2) Навести приклад опуклої підмножини $\mathbb{R}^2$, що не є борельовою.

Д2. Нехай $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda_d(\mathsf{A}) > 1$. Довести, що знайдуться дві різні точки $x,\ y \in \mathsf{A}$ такі, що $x - y$ має цілочисельні координати.

Д3. 1) Довести, що будь-яка замкнена множина $\mathsf{F} \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda_d(\mathsf{F}) > 0$, має потужність континууму. (Не припускати справедливість гіпотези континууму.)
2) Довести, що будь-яка множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda_d(\mathsf{A}) > 0$, має потужність континууму.

Б5

Г1. Розглядається множина A точок $(x,y) \in [0,1]^2$, таких, що 2^{x+y} раціональне.
1) Довести, що множина A борельова. 2) Знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$.

Г2. Нехай $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^d$, і $\lambda_d(\mathsf{A}) = p$. Довести, що для будь-якого $q \in [0,p]$ існує $\mathsf{A}_q \subset \mathsf{A}$ така, що $\lambda_d(\mathsf{A}_q) = q$.

І1. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^2$ борельова, та знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;
2) $\mathsf{A} = \{x \mid \sin x \in \mathbb{Q}\} \times \mathbb{R}$;
3) $\mathsf{A} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$;
4) $\mathsf{A} = \{x \mid \cos x \in \mathbb{Q}\} \times \mathbb{R}$;
5) $\mathsf{A} = \{x \mid e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \times \mathbb{R}$;
6) $\mathsf{A} = ([1,2] \times [3,7]) \setminus ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q})$;
7) $\mathsf{A} = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}) \cap ([0,2] \times [1,3])$;
8) $\mathsf{A} = ((0,3] \times [1,2)) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$;
9) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right\} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$;
10) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\right\} \times \mathbb{R}$.

І2. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^2$ борельова, та знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = \{(x,y)\ :\ |y| \leq |\sin x|,\ |x| \leq \pi\}$;
2) $\mathsf{A} = \{(x,y)\ :\ |y| \leq |\cos x|,\ 0 \leq x \leq \pi\}$;
3) $\mathsf{A} = \{(x,y) \mid 0 \leq xy \leq 1,\ 1 \leq x \leq 2\}$;
4) $\mathsf{A} = \left\{(x,y) \mid x\sqrt{y} \leq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 0\right\}$;
5) $\mathsf{A} = \{(x,y) \mid 0 \leq ye^x \leq 1,\ x \geq 2\}$;
6) $\mathsf{A} = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x^2 y \leq 2,\ x \geq 2\right\}$;
7) $\mathsf{A} = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| \leq \dfrac{1}{2}\right\}$;
8) $\mathsf{A} = \left\{(x,y)\ :\ |y| \leq \dfrac{1}{1+x^2},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3}\right\}$;
9) $\mathsf{A} = \left\{(x,y)\ :\ |y| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \operatorname{sh} 1 \leq x \leq \operatorname{sh} 2\right\}$;
10) $\mathsf{A} = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq |1-x|,\ x \in [0,4]\}$.

І3. Нехай $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n$. Довести, що A – борельова множина, та знайти $\lambda_2(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A}_n = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x^{-2},\ x \in [n,n+1]\right\}$;
2) $\mathsf{A}_n = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x^{-1},\ x \in [n,n+1]\right\}$;
3) $\mathsf{A}_n = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq e^{-x},\ x \in [n,n+1]\}$;
4) $\mathsf{A}_n = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq e^{-|x|},\ x \in [-n,n]\right\}$;

5) $\mathsf{A}_n = \Big\{(x,y) \mid 0 \le y \le e^{-x^2},\ x \in [-n^2, \ln n]\Big\}$;

6) $\mathsf{A}_n = \Big\{(x,y)\ :\ |y| \le \min\Big(1, x^{-2}\Big),\ x \in [-n, n]\Big\}$;

7) $\mathsf{A}_n = \Big\{(x,y) \mid 0 \le y \le \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in [n, n+1]\Big\}$;

8) $\mathsf{A}_n = \Bigg\{(x,y) \mid \dfrac{1}{\sqrt{x^2+n^{-2}}} \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+(n+1)^{-2}}},\ x \in [1,2]\Bigg\}$;

9) $\mathsf{A}_n = \Big\{(x,y) \mid \dfrac{1}{x^2+n+1} \le y \le \dfrac{1}{x^2+n},\ x \in [1, +\infty)\Big\}$;

10) $\mathsf{A}_n = \Big\{(x,y) \mid 0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x \in \Big[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\Big]\Big\}$.

ЗАНЯТТЯ 6
МІРА ЛЕБЕГА-СТІЛТЬЄСА НА ПРЯМІЙ

Контрольне запитання

Побудова міри Лебега-Стілтьєса на прямій.

А6

В задачах заняття 6 вважаємо, що $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неспадна неперервна справа функція, λ_F – міра Лебега-Стілтьєса, породжена F, λ_F^* – відповідна зовнішня міра, $\mathcal{S}_F$ – σ-алгебра λ_F^*-вимірних множин.

1. Довести, що
1) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} : \lambda_F(\{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0-)$;
2) $\lambda_F(\{x_0\}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли F неперервна в точці x_0.

2. Довести, що:
1)$\lambda_F((a,b)) = F(b-) - F(a)$; 4)$\lambda_F(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty)$;
2)$\lambda_F([a,b)) = F(b-) - F(a-)$; 5)$\lambda_F([a,+\infty)) = F(+\infty) - F(a-)$;
3)$\lambda_F([a,b]) = F(b) - F(a-)$; 6)$\lambda_F((-\infty,a]) = F(a) - F(-\infty)$,
де $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$.

3. Нехай $F(x) = [x]$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Знайти:
1) $\lambda_F(\{x\}),\ x \in \mathbb{R}$; 3) $\lambda_F((0,1))$; 5) $\lambda_F(\mathbb{N})$;
2) $\lambda_F([0,20] \cap \mathbb{Q})$; 4) $\lambda_F([0,1])$; 6) $\lambda_F(\mathbb{Q})$.

4. Нехай $F(x) = [x]$. Довести, що
1) $\mathcal{S}_F = 2^{\mathbb{R}}$; 2) $\forall\, \mathsf{A} \subset \mathbb{R} : \lambda_F(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$, де $|\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$ – кількість елементів множини $\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}$.

5. Нехай $F(x) = x + [x]$. Довести, що
1) $\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_1$ 2) $\lambda_F(\mathsf{A}) = \lambda_1(\mathsf{A}) + |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|,\ A \in \mathcal{S}_F$.

6. Розглянемо клас множин

$$\mathcal{H} = \big\{(a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a \le b\big\}.$$

1) Чи буде $\mathcal{H}$ півкільцем? 2) Чи буде $\mathcal{H}$ кільцем?

Визначимо на $\mathcal{H}$ функцію множин: $\mu(\varnothing) = 0$,

$$\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = F(b+) - F(a+).$$

3) Чи буде μ скінченно-адитивною на $\mathcal{H}$? 4) Чи буде μ зліченно-адитивною на $\mathcal{H}$?

Д1. Довести, що множина $\{x \in \mathbb{R} \mid \lambda_F(\{x\}) > 0\}$ не більш ніж зліченна.

Д2. Нехай $F(x) = x^3$, $\mathsf{D} \subset [0,1]$ – канторова множина (див. А4).
1) Довести, що $\mathsf{D} \in \mathcal{S}_F$. 2) Знайти $\lambda_F(\mathsf{D})$.

Д3. Нехай $F(x) = x|x|$. Довести, що
1) $\mathcal{S}_F \cap [1,2] = \mathcal{S}_1 \cap [1,2]$; 2) $\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_1$.

Д4. Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$. Множина $\mathsf{E} \in \mathcal{F}$ називається *атомом* для μ, якщо $\mu(\mathsf{E}) > 0$ і для будь-якої $\mathsf{A} \subset \mathsf{E}$, $\mathsf{A} \in \mathcal{F}$ буде $\mu(\mathsf{A}) = \mu(\mathsf{E})$ або $\mu(\mathsf{A}) = 0$. Міра без атомів називається *безатомічною*. Атоми E_1 і E_2 називаються *еквівалентними*, якщо $\mu(\mathsf{E}_1 \triangle \mathsf{E}_2) = 0$.
1) Визначити множину атомів λ_F.
2) При яких умовах на функцію F міра λ_F буде безатомічною?
3) Довести, що довільна скінченна міра μ може мати не більш ніж зліченне число нееквівалентних атомів.
4) Показати, що множиною значень безатомічної скінченної міри μ є відрізок $[0, \mu(\mathsf{X})]$.

Б6

Г1. Нехай F, G – неспадні неперервні справа функції на $\mathbb{R}$, λ_F і λ_G – відповідні міри Лебега-Стілтьєса на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Чи правильно, що:

1) $\lambda_F((a,b]) = \lambda_G((a,b])$, якщо $F(x) = G(x),\ x \in (a,b]$;
2) $\lambda_F([a,b]) = \lambda_G([a,b])$, якщо $F(x) = G(x),\ x \in [a,b]$?

Г2. Нехай $F(x) = 2x$. Довести, що:

1) $\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_1$ 2) $\lambda_F(\mathsf{A}) = 2\lambda_1(\mathsf{A}),\ A \in \mathcal{S}_F$.

І1. Нехай $F(x) = [x],\ x \in \mathbb{R}$. Визначити $\lambda_F(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = \mathbb{Q} \cap [-n,n],\ n \in \mathbb{N}$;
2) $\mathsf{A} = \mathbb{Q} \cap (-n,n),\ n \in \mathbb{N}$;
3) $\mathsf{A} = [-n,n),\ n \in \mathbb{N}$;
4) $\mathsf{A} = (-n,n)\backslash\mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}$;
5) $\mathsf{A} = \{x > 0 \mid\ \ln x < 2\}$;
6) $\mathsf{A} = [n,n^2),\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$;
7) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 5 < 0\right\}$;
8) $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid\ \cos \pi x > 0\} \cap [0,10]$;
9) $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid\ \sin \pi x < 1/2\} \cap [0,8]$;
10) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid\ \sqrt{|x|} \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\right\} \cap [-20,20]$.

І2. Нехай

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^x[x], & x \geq 0. \end{cases}$$

Довести, що множина A є борельовою, та визначити $\lambda_F(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = [0,1]$;
2) $\mathsf{A} = [0,2)$;
3) $\mathsf{A} = [0,3] \cap \mathbb{Q}$;
4) $\mathsf{A} = [-2,2] \cap \mathbb{Q}$;
5) $\mathsf{A} = [-2,2]\backslash\mathbb{Q}$;
6) $\mathsf{A} = (-\infty,1] \cap \mathbb{Q}$;
7) $\mathsf{A} = (-\infty,2]\backslash\mathbb{Q}$;
8) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\right\} \cap [0,9]$;
9) $\mathsf{A} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\} \cap [0,10]$;
10) $\mathsf{A} = \{x > 0 \mid\ \log_2 x \in \mathbb{Q}\} \cap [0,10]$.

І3. Довести, що довільна множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ є λ_F^*-вимірною, і обчислити $\lambda_F(\mathsf{A})$, якщо:

1) $F(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < +\infty; \end{cases}$

2) $F(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ 3, & 1 \leq x < +\infty; \end{cases}$

3) $F(x) = \begin{cases} -5, & -\infty < x < -5, \\ 10, & -5 \leq x < +\infty; \end{cases}$

4) $F(x) = \begin{cases} -3, & -\infty < x < -7, \\ 7, & -7 \leq x < +\infty; \end{cases}$

5) $F(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x < +\infty; \end{cases}$

6) $F(x) = \begin{cases} -5, & -\infty < x < -2\pi, \\ 5, & -2\pi \leq x < \pi, \\ 10, & \pi \leq x < +\infty; \end{cases}$

7) $F(x) = \begin{cases} -8, & -\infty < x < -10, \\ 0, & -10 \leq x < 10, \\ 11, & 10 \leq x < +\infty; \end{cases}$

8) $F(x) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & -\infty < x < e, \\ 1, & e \leq x < \pi, \\ 3, & \pi \leq x < +\infty; \end{cases}$

9) $F(x) = [x^3],\ x \in \mathbb{R}$;

10) $F(x) = [\operatorname{arctg} x],\ x \in \mathbb{R}$.

ЗАНЯТТЯ 7
КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. 1) З'ясувати, чи є півкільцем або кільцем клас множин $\mathcal{H} = \left\{(a^2, b],\ a,\ b \in \mathbb{N},\ a^2 \leq b\right\} \cup \{\varnothing\}$.

2) З'ясувати, чи є півкільцем або кільцем клас множин $\mathcal{H} = \left\{\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,\ 1,\ 2\}\right\}$.

2.Розглянемо клас множин $\mathcal{H} = \left\{(a, a+1/2],\ a \in \mathbb{R}\right\}$. Чи буде інтервал $(0,1)$ належати породженому кільцю $k(\mathcal{H})$?

3. Нехай $\mathcal{A}$ — алгебра підмножин X, $\varphi : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ — адитивна функція множин, $\{\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{C}\} \subset \mathcal{A}$ та відомі значення $\varphi(\mathsf{X})$, $\varphi(\mathsf{A})$, $\varphi(\mathsf{B})$, $\varphi(\mathsf{C})$, $\varphi(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$, $\varphi(\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$, $\varphi(\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$, $\varphi(\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Для довільної множини D будемо вживати позначення $\overline{\mathsf{D}} = \mathsf{X} \setminus \mathsf{D}$. Визначити

$$\varphi\big((\mathsf{A} \cup \mathsf{B})\Delta\mathsf{C}\big).$$

4. Нехай $\{x_1,\ x_2\} \subset \mathsf{X},\ x_1 \neq x_2$. Чи буде μ мірою на 2^{X}, якщо $\mu(\mathsf{A}) = 2\mathrm{I}_{\mathsf{A}}(x_1)\mathrm{I}_{\mathsf{A}}(x_2)$?

5. Довести, що множина $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ є борельовою і знайти її міру Лебега:

1) $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{k^3+1}{k^2+k}, \frac{k^3+k+1}{k^2+k}\right]$. 2) $\mathsf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right\}$.

6. Розглянемо функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таку, що

$$F(x) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ 2^x + [x], & x \geq 0. \end{cases}$$

Довести, що множина $\mathsf{A} = (-1, 2) \cap \mathbb{Q}$ є борельовою та визначити $\lambda_F(\mathsf{A})$.

7. Нехай $\mathsf{A} \subset [0,1]$, $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$. Чи може множина $\mathsf{A} - \mathsf{A} = \{x - y : \ x, \ y \in \mathsf{A}\}$ мати додатну міру λ_1?

ЗАНЯТТЯ 8
ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення $(\mathcal{F}_\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{Y})$-вимірної, $\mathcal{F}$-вимірної, борельової, вимірної за Лебегом функцій.*
2. *Основні теореми про дії з вимірними функціями.*
3. *Теорема про наближення вимірних функцій простими.*

А8

В задачах заняття 8 вважаємо, що $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$ – вимірний простір.

1. Нехай $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$, $\{\mathsf{A}_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j = \varnothing, \ i \neq j, \ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n = \mathsf{X}$, і функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ така, що $f(x) = a_n$ при $x \in \mathsf{A}_n$, $n \geq 1$. Довести, що функція f є $\mathcal{F}$-вимірною.

2. За допомогою теорем про властивості вимірних функцій довести, що є борельовими такі функції на $\mathbb{R}$:

1) $\sin[x]$; 3) $\sin f(x)$; 5) $\{x\}$,
2) $\operatorname{sign} \cos x^2$; 4) $g(x)^{f(x)}$, 6) $\operatorname{tg}[x]$.

де f і g – борельові функції, $g > 0$.

3. Довести, що борельовими є наступні функції на $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0, \\ x - 1, & x \geq 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

4. Довести, що борельовими є наступні функції на $\mathbb{R}^2$:
1) $f(x,y) = \arcsin \frac{x^2}{x^2+y^2+1}$; 2) $f(x,y) = [x]$.

5. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\forall\, x \in \mathbb{R} \ \exists\, f'(x)$. Довести, що функція f' є борельовою.

6. Нехай $f \in \mathbb{C}\left((0,1)^2\right)$. Довести, що функція $\varphi(x) = \sup_{y \in (0,1)} f(x,y)$ борельова на $(0,1)$.

Д1. Довести, що:
1) якщо функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{F}$-вимірною, то $\forall\, a \in \mathbb{R} : \{x \in \mathsf{X} \mid f(x) = a\} \in \mathcal{F}$;
2) обернене твердження, взагалі кажучи, є хибним.

Д2. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ обмежена. Довести, що існує послідовність простих функцій, яка збігається до f рівномірно на $\mathbb{R}$.

Д3. Нехай V – деяка сукупність $\mathcal{F}$-вимірних функцій. Довести, що:
1) функції $f^*(x) = \sup_{f \in V} f(x)$ і $f_*(x) = \inf_{f \in V} f(x)$, $x \in \mathsf{X}$, не є, взагалі кажучи, $\mathcal{F}$-вимірними;
2) якщо $\mathsf{X} = \mathbb{R}$ і $V \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$, то f^* і f_* є борельовими.

Д4. Нехай $f \in \mathbb{C}([0,1])$. *Індикатрисою Банаха* називається функція $g(y)$, $y \in \mathbb{R}$, рівна кількості коренів рівняння $f(x) = y$ на $[0,1]$ (можливо, $+\infty$). Довести, що функція g борельова.

Д5. Нехай $\mathcal{S}_1$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом множин в $\mathbb{R}$. Довести, що функція $f(x) = x^2$ є $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1)$-вимірною.

Б8

Г1. Нехай $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ – σ-алгебри підмножин X і $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Яке співвідношення між класами $\mathcal{F}_1$-вимірних і $\mathcal{F}_2$-вимірних функцій?

Г2. Довести, що функція $f(x) = \operatorname{tg}\{x\}$ борельова на $\mathbb{R}$ ($\{x\}$ позначає дробову частину x).

Г3. Довести, що якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борельова функція, то функція $g(x,y) := f(x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, також борельова.

I1. Довести, що функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ борельова, якщо:

1) $f(x,y)=\operatorname{sign}\sin\pi(x^2+y^2)$;
2) $f(x,y)=\operatorname{sign}\cos\pi(x^2+y^2)$;
3) $f(x,y)=(x^2+y^2)[x]$;
4) $f(x,y)=(|x|+|y|)e^{[y]}$;
5) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\sin[x^2+y^2]$;
6) $f(x,y)=\operatorname{arctg}([x]\cos(x^2+y^2))$;
7) $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(1+[x^2+y^2])$;
8) $f(x,y)=[x]^2+[y]^3$;
9) $f(x,y)=\operatorname{ch}\sin([x]+[y])$;
10) $f(x,y)=\cos\operatorname{sh}([x^2+y^2])$.

I2. Нехай $f_i:\mathsf{X}\to\mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $i=\overline{1,n}$. Довести $\mathcal{F}$-вимірність таких функцій:

1) $\dfrac{f_1}{\ln(2+|f_2|)}$;
2) $\max(f_1,\ldots,f_n)$;
3) $\min(f_1,\ldots,f_n)$;
4) $\dfrac{f_1}{\operatorname{ch} f_2}$;
5) $\sin(|f_1|+...+|f_n|)$;
6) $(1+|f_1|)^{f_2}$;
7) $\dfrac{f_1f_2}{1+|\max(f_3,f_4)|}$;
8) $\dfrac{f_1+...+f_n}{10+\operatorname{arctg} f_1}$;
9) $\dfrac{\operatorname{sh} f_1}{1+|f_2|}$;
10) $\dfrac{\operatorname{arctg} f_1}{1+|\max(f_2,f_3)|}$.

I3. Довести, що функція f є борельовою, якщо:

1) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{|x|+n},\ x\in\mathbb{R}$;
2) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x^2},\ x\in\mathbb{R}$;
3) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n[x]^4)}{n\sqrt{n}},\ x\in\mathbb{R}$;
4) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^4},\ x\in\mathbb{R}$;
5) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+[x]^4}},\ x\in\mathbb{R}$;
6) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[x]}{1+n^5[x]^2},\ x\in\mathbb{R}$;
7) $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(x^2+y^2))}{\sqrt[4]{n^4+[x^2+y^2]}},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;
8) $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\operatorname{arctg}(n([x]+y)),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;
9) $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin([x]^2+[y])^n,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;
10) $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n(1+n[x^2+y^2])},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

ЗАНЯТТЯ 9
ЕКВІВАЛЕНТНІ ФУНКЦІЇ.
ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ СКРІЗЬ

Контрольні запитання

1. *Означення еквівалентності функцій.*
2. *Означення збіжності майже скрізь.*
3. *Теорема Єгорова.*

A9

В задачах заняття 9 $(\mathsf{X},\mathcal{F},\lambda)$ – вимірний простір з мірою.

1. Серед функцій, заданих на $\mathbb{R}$,

$$f_1(x)=0,\quad f_2(x)=1,\quad f_3(x)=\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x),\quad f_4(x)=\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x),\quad f_5(x)=[x],\quad f_6(x)=[x]\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x),$$

визначити класи функцій, еквівалентних відносно:

1) міри Лебега λ_1;
2) міри $\lambda(\mathsf{A})=|\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}$.
3) міри $\mu(\mathsf{A})=\lambda_1\big(\mathsf{A}\cap[0,1]\big)$, $\mathsf{A}\in\mathcal{S}_1$.

2. Нехай $\mathsf{X}=\mathbb{R},\ \lambda_1$ – міра Лебега на $\mathbb{R},\ \{f,g\}\subset\mathbb{C}(\mathbb{R})$ і $f=g\ (\mathrm{mod}\,\lambda_1)$. Довести, що $\forall\,x\in\mathbb{R}:f(x)=g(x)$.

3. Чи є збіжними майже скрізь послідовності функцій, заданих на $\mathbb{R}$,

$$f_n^{(1)}(x)=\sin^n\pi x,\quad f_n^{(2)}(x)=\cos^n\pi x,\quad f_n^{(3)}(x)=\{nx\},\quad f_n^{(4)}(x)=\{n/x\},\ x\neq0,\quad f_n^{(4)}(0)=0:$$

відносно:

1) міри Лебега λ_1;
2) міри $\lambda(\mathsf{A})=|\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}$.

3) міри $\mu(\mathsf{A}) = \lambda_1\big(\mathsf{A} \cap [0,1]\big)$, $\mathsf{A} \in \mathcal{S}_1$?

(Тут $\{a\}$ позначає дробову частину числа a.)

4. Дано послідовність функцій $f_n(x) = \Big(x + \dfrac{1}{n}\Big)^n$, $x \in [0,1]$.

1) Довести, що $f_n \to 0 \pmod{\lambda_1}$ на $[0,1]$.

2) Для кожного $\varepsilon > 0$ знайти множину $\mathsf{A}_\varepsilon \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda_1(\mathsf{A}_\varepsilon) < \varepsilon$, таку, що на $[0,1] \backslash \mathsf{A}_\varepsilon$ послідовність $\{f_n\}$ збігається рівномірно.

5. Нехай $\mathsf{N}_n \in \mathcal{F}$, $\lambda(\mathsf{N}_n) = 0$, $n \geq 1$. Довести, що $\lambda\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{N}_n\Big) = 0$.

6. Відомо, що

$$\forall\, n \geq 1 : \ f_n(x) \leq g_n(x) \pmod{\lambda};$$

$$f_n(x) \to f(x) \pmod{\lambda}; \quad g_n(x) \to g(x) \pmod{\lambda}.$$

Довести, що $f(x) \leq g(x) \pmod{\lambda}$.

7. Відомо, що

$$\forall\, n \geq 1 : \ f_n(x) \leq g_n(x) \leq h_n(x) \pmod{\lambda};$$

$$f_n(x) \to f(x) \pmod{\lambda}; \quad h_n(x) \to f(x) \pmod{\lambda}.$$

Довести, що $g_n(x) \to f(x) \pmod{\lambda}$.

8. Для функцій на $\mathbb{R}$ і міри $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$, $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ довести, що:

1) $f = g \pmod{\lambda} \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in \mathbb{Z} : f(k) = g(k)$;

2) $f_n \to f \pmod{\lambda} \ \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z} : f_n(k) \to g(k), \ n \to \infty$.

Д1. Чи є збіжними майже скрізь відносно міри Лебега λ_1 послідовності функцій, заданих на $\mathbb{R}$:

1) $f_n(x) = \sin(x + 1/n)$; 2) $g_n(x) = \sin(nx)$?

Д2. Нехай $f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $f_n \to 0 \pmod{\lambda}$, $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$. Довести, що знайдеться числова послідовність $\{t_n\}$ така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |t_n| > 0 \text{ і } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |t_n f_n| < +\infty \pmod{\lambda}.$$

Д3. Нехай $f, \ f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$. Довести, що

$$f_n \to f \pmod{\lambda} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Д4. Нехай $f, \ f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції і

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x \in \mathsf{X} \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

Довести, що $f_n \to f \pmod{\lambda}$.

Д5. Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – функція, вимірна за Лебегом. Довести, що існує послідовність функцій $\{f_n\} \subset \mathbb{C}([a,b])$ така, що $f_n \to f \pmod{\lambda_1}$.

Б9

Г1. Нехай $f_n \to f \pmod{\lambda}$ і $g_n \to g \pmod{\lambda}$. Довести, що:

1) $f_n + g_n \to f + g \pmod{\lambda}$;

2) $\max(f_n, g_n) \to \max(f, g) \pmod{\lambda}$;

3) $(1 + |f_n|)^{g_n} \to (1 + |f|)^g \pmod{\lambda}$.

Г2. Довести, що в просторі всіх функцій $\big\{f \mid f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}\big\}$ відношення $f(x) = g(x) \pmod{\lambda}$ рефлексивне, симетричне та транзитивне. (Тоді це відношення еквівалентності і простір розбивається на класи еквівалентності).

Г3. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$, λ_F – міра Лебега-Стілтьєса, породжена функцією $F(x) = x\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x)$. Довести, що

$$f = g \pmod{\lambda_F} \ \Leftrightarrow \ \forall\, x \geq 0 : f(x) = g(x).$$

Г4. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$, функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Чи правильні наступні твердження:

1) якщо існує функція $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ така, що $f = g \pmod{\lambda_1}$, то f неперервна майже скрізь відносно міри λ_1;

2) якщо f неперервна майже скрізь відносно міри λ_1, то існує функція $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ така, що $f = g \pmod{\lambda_1}$?

І1. Знайти функцію $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ (у випадку 1)-6) $d = 1$, а 7)-10) – $d = 2$), щоб $g = f \pmod{\lambda_d}$, якщо:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x^2\in\mathbb{Q},\\ 0, & x^2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\in\mathbb{Z},\\ \pi, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z};\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+|x|), & e^x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\\ \sin x^2, & e^x\in\mathbb{Q};\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\arcsin 2^{-|x|}, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N},\\ 2^{|x|}, & x\in\mathbb{N};\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}, & e^x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\\ 0, & e^x\in\mathbb{Z};\end{cases}$

7) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\\ x^2, & (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{Q};\end{cases}$

8) $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+\sin y, & (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{R},\\ \cos x, & (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{R};\end{cases}$

9) $f(x,y)=\begin{cases}xy, & (x,y)\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\times\mathbb{R},\\ x+y, & (x,y)\notin(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\times\mathbb{R};\end{cases}$

10) $f(x,y)=\begin{cases}[x]+[y], & (x,y)\notin(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\times\mathbb{R},\\ \operatorname{ch} x, & (x,y)\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\times\mathbb{R}.\end{cases}$

I2. Знайти таку функцію $g\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$, щоб $f_n\to g \pmod{\lambda_1}$, якщо:

1) $f_n(x)=\cos^n x$;
2) $f_n(x)=x^2\sin^n x^2$;
3) $f_n(x)=\cos^n x+\sin^n x$;
4) $f_n(x)=e^{-n|x^2-1|}$;
5) $f_n(x)=\dfrac{n^2\sin^2 x}{1+n^2\sin^2 x}$;
6) $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{2+\sin^n x}$;
7) $f_n(x)=\sin^n(1/x) \pmod{\lambda_1}$;
8) $f_n(x)=\sin^n 3x$;
9) $f_n(x)=\big((2/\pi)\operatorname{arctg} x\big)^n+\sin^n 2x$;
10) $f_n(x)=e^{-n\sin^{2n}(1/x)} \pmod{\lambda_1}$

I3. Довести збіжність майже скрізь відносно міри Лебега λ_1 на $\mathbb{R}$ послідовності функцій $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ n\ge 1$, і для кожного $\varepsilon>0$ знайти множину $\mathsf{A}_\varepsilon\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda_1(\mathsf{A}_\varepsilon)<\varepsilon$ таку, що на $\mathbb{R}\backslash\mathsf{A}_\varepsilon$ послідовність $\{f_n\}$ збігається рівномірно, якщо:

1) $f_n(x)=(\cos^n\pi x)\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
2) $f_n(x)=(\sin^n\pi x)\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
3) $f_n(x)=x^n\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
4) $f_n(x)=\dfrac{n^2\sin\pi x}{1+n^2\sin\pi x}\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
5) $f_n(x)=\dfrac{n|\cos\pi x|}{1+n|\cos\pi x|}\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{I}_{(0,1]}(x)$;
7) $f_n(x)=(x^n-x^{2n})\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
8) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$;
9) $f_n(x)=e^{n(x-2)}\,\mathrm{I}_{[0,2]}(x)$;
10) $f_n(x)=(x^n-x^{n^2})\,\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$.

ЗАНЯТТЯ 10
ЗБІЖНІСТЬ ЗА МІРОЮ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Означення збіжності за мірою.*
2. *Як пов'язані між собою збіжності за мірою і майже скрізь?*
3. *Означення фундаментальності за мірою, її зв'язок зі збіжністю за мірою.*

А10

В задачах заняття 10 λ – міра на вимірному просторі $(\mathsf{X},\mathcal{F})$; усі функції, які розглядаються, є $\mathcal{F}$-вимірними і набувають тільки скінченних значень.

1. Чи є збіжними послідовності функцій, заданих на $\mathbb{R}$,

$$f_n^{(1)}(x)=\sin^n\pi x,\quad f_n^{(2)}(x)=\cos^n\pi x,\quad f_n^{(3)}(x)=\{nx\},\quad f_n^{(4)}(x)=\{n/x\},\ x\ne 0,\quad f_n^{(4)}(0)=0:$$

1) за мірою Лебега λ_1;
2) за мірою $\lambda(\mathsf{A})=|\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}$.
3) за мірою $\mu(\mathsf{A})=\lambda_1\big(\mathsf{A}\cap[0,1]\big)$, $\mathsf{A}\in\mathcal{S}_1$?

(Тут $\{a\}$ позначає дробову частину числа a.)

2. Довести, що:

1) $f_n \xrightarrow{\lambda} 0 \;\Rightarrow\; f_n^2 \xrightarrow{\lambda} 0$; 3) $f_n \xrightarrow{\lambda} f \;\Rightarrow\; \cos f_n \xrightarrow{\lambda} \cos f$;

2) $f_n \xrightarrow{\lambda} f \;\Rightarrow\; |f_n| \xrightarrow{\lambda} |f|$; 4) $f_n \xrightarrow{\lambda} f \;\Rightarrow\; cf_n \xrightarrow{\lambda} cf, \quad c \in \mathbb{R}$;

5) $f_n \xrightarrow{\lambda} f,\; g_n \xrightarrow{\lambda} g \;\Rightarrow\; f_n + g_n \xrightarrow{\lambda} f + g$.

3. Відомо, що

$$\forall\, n \geq 1 : \; f_n(x) \leq g_n(x) \pmod{\lambda};$$

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f, \quad g_n \xrightarrow{\lambda} g.$$

Довести, що $f(x) \leq g(x) \pmod{\lambda}$.

4. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty,\; f$ – деяка функція і $g_n \xrightarrow{\lambda} g$. Довести, що:

1) $\lambda(\{x \in \mathsf{X} : \; |f(x)| \geq n\}) \to 0, \quad n \to \infty$; 2) $g_n f \xrightarrow{\lambda} gf$;

3) твердження з 1) і 2), взагалі кажучи, є хибними у випадку $\lambda(\mathsf{X}) = +\infty$.

5. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$. Довести, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ тоді і тільки тоді, коли з будь-якої підпослідовності $\{f_{n_k}\}$ можна виділити підпідпослідовність $f_{n_{k_i}} \to f \pmod{\lambda}$, $i \to \infty$.

6. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$, $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, $f(x) \neq 0$ і всі $f_n(x) \neq 0$. Довести, що $(1/f_n) \xrightarrow{\lambda} (1/f)$.

7. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$, $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, $g_n \xrightarrow{\lambda} g$ і $\varphi \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$. Довести, що $\varphi(f_n, g_n) \xrightarrow{\lambda} \varphi(f, g)$.

Д1. Нехай послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій $\{f_n : \; n \geq 1\}$ така, що

$$\forall\, n \geq 1 : 0 \leq f_{n+1} \leq f_n \pmod{\lambda}, \quad f_n \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Довести, що $f_n \to 0 \pmod{\lambda}$.

Д2. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$. Довести, що $f_n \to f \pmod{\lambda}$ тоді і тільки тоді, коли $\sup\limits_{k \geq n} |f_k - f| \xrightarrow{\lambda} 0$, $n \to \infty$.

Д3. Відомо, що $\forall\, n \geq 1 : \; f_n(x) \leq g_n(x) \leq h_n(x) \pmod{\lambda}$; $\quad f_n \xrightarrow{\lambda} f, \quad h_n \xrightarrow{\lambda} f$. Довести, що $g_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Д4. 1) Нехай послідовність борельових функцій $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ збігається до нуля за мірою Лебега λ_1 на $[0,1]$. Доведіть, що існує числова послідовність $\{c_n\}$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty, \quad c_n f_n \xrightarrow{\lambda_1} 0.$$

2) Нехай послідовність борельових функцій $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ збігається до нуля майже скрізь відносно λ_1 на $[0,1]$. Доведіть, що існує числова послідовність $\{c_n\}$, така, що

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty, \quad c_n f_n \to 0 \pmod{\lambda_1}.$$

Д5. Довести, що збіжність майже скрізь відносно міри Лебега λ_1 для вимірних за Лебегом дійсних функцій на відрізку $[0,1]$ не можна задати ніякою метрикою (тобто, на вказаній множині функцій не існує метрики такої, що послідовність функцій збігається в цій метриці тоді і тільки тоді, коли збігається майже скрізь відносно λ_1).

Д6. Нехай $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом. Довести, що для послідовності $f_n(x) = f\Big(x - \dfrac{1}{n}\Big)$, $n \geq 1$, $x \in [0,1]$, буде $f_n \xrightarrow{\lambda_1} f$ на $[0,1]$.

Б10

Г1. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$, $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ і $\varphi \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Довести, що $\varphi(f_n) \xrightarrow{\lambda} \varphi(f)$.

Г2. Нехай $\{\mathsf{A}_n : \; n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$. Довести, що послідовність функцій $\{\mathrm{I}_{\mathsf{A}_n} \; : \; n \geq 1\}$ фундаментальна за мірою λ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda(\mathsf{A}_j \triangle \mathsf{A}_k) \to 0, \quad j, \; k \to \infty.$$

Г3. Нехай $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$. Довести, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{f_n\}$ збігається рівномірно до f на $\mathbb{Z}$.

І1. Довести, що послідовність $\{f_n\}$ збігається за мірою Лебега λ_1, та знайти її границю, якщо для $x \in \mathbb{R}$ і $n \geq 1$:

1) $f_n(x) = \mathrm{I}_{[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}]}(x)$;

2) $f_n(x) = 2 - \mathrm{I}_{[\ln n, \ln(n+1))}(x)$;

3) $f_n(x) = \mathrm{I}_{[H_n, H_{n+1}]}(x)$, де $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$;

4) $f_n(x) = \mathrm{I}_{(\ln n, \ln(n+10))}(|x|)$;

5) $f_n(x) = \sin^n x \cdot \mathrm{I}_{[2\pi n, 2\pi n+\pi)}(x)$;
6) $f_n(x) = \cos^n x \cdot \mathrm{I}_{[-\pi/2+2\pi n, \pi/2+2\pi n]}(x)$;
7) $f_n(x) = \mathrm{I}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x) + \frac{x}{n}\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x)$;
8) $f_n(x) = \cos x + |x|\mathrm{I}_{[\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n+5}]}(x)$;
9) $f_n(x) = \mathrm{I}_{[\operatorname{arctg} n, \operatorname{arctg}(n+1))}(x) + \frac{x}{n^2}\mathrm{I}_{[n,n+1)}(x)$;
10) $f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mathrm{I}_{[k, k+k^{-2}]}(x)$.

12. Нехай λ_2 – міра Лебега на $\mathbb{R}^2$. Знайти одну з функцій $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $f_n \xrightarrow{\lambda_2} g$ або довести, що такої g не існує, якщо для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ і $n \geq 1$:
1) $f_n(x, y) = \cos^n(x^2 + y^2)\, \mathrm{I}_{[0,100]}(x^2 + y^2)$;
2) $f_n(x, y) = e^{-n(x^2+y^2)}$;
3) $f_n(x, y) = e^{-n|x^2+y^2-1|}$;
4) $f_n(x, y) = 2^{\sin^n(x^4+y^4)}\, \mathrm{I}_{[0,100]}(x^2 + y^2)$;
5) $f_n(x, y) = \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n)}\, \mathrm{I}_{[0,100]}(x^2 + y^2)$;
6) $f_n(x, y) = n \ln\Big(1 + \frac{|x|+|y|}{n}\Big)\, \mathrm{I}_{[0,100]}(|x| + |y|)$;
7) $f_n(x, y) = 2^{x+y^2/n}$;
8) $f_n(x, y) = e^{\sin^n x + \sin^n y}\, \mathrm{I}_{[0,100]}(x^2 + y^2)$;
9) $f_n(x, y) = \sin^n \frac{1}{x^2+y^2} \pmod{\lambda_2}$;
10) $f_n(x, y) = \cos^n \frac{1}{|x|+|y|} \pmod{\lambda_2}$.

13. Нехай $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ і $g_n \xrightarrow{\lambda} g$. Довести, що:
1) $(\forall\, n \geq 1 : 2f_n = g_n \pmod{\lambda}) \Rightarrow 2f = g \pmod{\lambda}$;
2) $(\forall\, n \geq 1 : f_n + g_n > 1 \pmod{\lambda}) \Rightarrow f + g \geq 1 \pmod{\lambda}$;
3) $(\forall\, n \geq 1 : f_n < 0 \pmod{\lambda}) \Rightarrow f \leq 0 \pmod{\lambda}$;
4) $(\forall\, n \geq 1 : f_n > g \pmod{\lambda}) \Rightarrow f \geq g \pmod{\lambda}$;
5) $(\forall\, n \geq 1 : f_n < g_n \pmod{\lambda}) \Rightarrow f \leq g \pmod{\lambda}$;
6) $\max\{f_n, g_n\} \xrightarrow{\lambda} \max\{f, g\}$;
7) $(\forall\, n \geq 1 : f_n \geq g_n + 1 \pmod{\lambda}) \Rightarrow f \geq g + 1 \pmod{\lambda}$;
8) $\min\{f_n, g_n\} \xrightarrow{\lambda} \min\{f, g\}$;
9) $\big(f_n + g_n\big)_+ \xrightarrow{\lambda} \big(f + g\big)_+$;
10) $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty \;\Rightarrow\; \forall\, \mathsf{A} \in \mathcal{F}\; \forall\, \varepsilon > 0 : \lambda(\{x \in \mathsf{A} \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \to \lambda(\mathsf{A}), \quad n \to \infty$.

ЗАНЯТТЯ 11
ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. *Означення інтеграла Лебега від невід'ємної простої вимірної функції.*
2. *Означення інтеграла Лебега від невід'ємної вимірної функції.*
3. *Означення інтеграла Лебега у загальному випадку.*
4. *Означення інтегровної функції.*
5. *Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій*

A11

В задачах заняття 11 λ – міра на вимірному просторі $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$, λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$, λ_2 – міра Лебега на $\mathbb{R}^2$. Запис $f \in \mathsf{L}(\mathsf{A}, \lambda)$ означає, що функція f інтегровна по вимірній множині $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ відносно міри λ.

1. Обчислити:
1) $\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$; 2) $\int\limits_{[0,20)} \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$; 3) $\int\limits_{[0,100]} \dfrac{d\lambda_1(x)}{[x+1][x+2]}$;
4) $\int\limits_{\mathsf{A}} (-1)^{[x^2+y^2]}\, d\lambda_2(x, y)$, де $\mathsf{A} = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5\big\}$.

2. Нехай $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\} \subset \mathcal{F}$, $\lambda(\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}) < +\infty$ і відомі міри множин A, B, C, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$, $\mathsf{B} \cap \mathsf{C}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$. Обчислити

$$\int\limits_{\mathsf{X}} |\mathrm{I}_{\mathsf{A}} - 2\mathrm{I}_{\mathsf{B}}\mathrm{I}_{\mathsf{C}}|\, d\lambda\,.$$

3. Нехай

$$p(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sin \dfrac{\pi}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash (0, 1]. \end{cases}$$

Обчислити інтеграли: 1) $\int\limits_{\mathbb{R}} p_- \, d\lambda_1$; 2) $\int\limits_{\mathbb{R}} p_+ \, d\lambda_1$; 3) $\int\limits_{\mathbb{R}} |p| \, d\lambda_1$; 4) $\int\limits_{\mathbb{R}} p \, d\lambda_1$.

4. Нехай $\{a_n : n \geq 1\} \subset [0, +\infty]$, $\{\mathsf{A}_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$, $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n = \mathsf{X}$, і функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ така, що $f(x) = a_n$ при $x \in \mathsf{A}_n$, $n \geq 1$. Довести, що

$$\int_{\mathsf{A}} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}).$$

5. Нехай $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (n, n + n^{-\alpha}]$. При яких $\alpha \in \mathbb{R}$ функція $\mathrm{I}_{\mathsf{A}}(x)$ є інтегровною на $\mathbb{R}$ відносно міри Лебега λ_1?

6. Використовуючи лише означення інтеграла Лебега, довести, що $\int_{(0,1)} x^{-2} \, d\lambda_1(x) = +\infty$.

7. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x, y) \in (0, 1)^2 \text{ і } xy \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \in (0, 1)^2 \text{ і } xy \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Знайти $\int_{(0,1)^2} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y)$.

8. Нехай

$$F(x) = 2\mathrm{I}_{[1,2)}(x) + 3\mathrm{I}_{[2,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbb{R}$. Довести, що довільна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є інтегровною на $\mathbb{R}$ відносно міри λ_F і

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_F = 2f(1) + f(2).$$

Д1. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$ і $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція. Довести, що

1) $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\lambda(\{x \in \mathsf{X} \mid k \leq |f(x)| < k + 1\}) < +\infty$;

2) $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\{x \in \mathsf{X} \mid |f(x)| \geq k\}) < +\infty$;

3) $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \lambda(\{x \in \mathsf{X} \mid |f(x)| \geq 2^k\}) < +\infty$.

Д2. Нехай λ_d – міра Лебега в $\mathbb{R}^d$, $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^d$ – обмежена вимірна за Лебегом множина, $f : \mathsf{A} \to \mathbb{R}$ – рівномірно неперервна на A функція. Довести, що $f \in \mathsf{L}(\mathsf{A}, \lambda_d)$.

Д3. Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з σ-скінченною мірою, $f : \mathsf{X} \to (0, +\infty)$ – додатна $\mathcal{F}$-вимірна функція. Довести, що існує додатна $\mathcal{F}$-вимірна функція $g : \mathsf{X} \to (0, +\infty)$ така, що $fg \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$.

Д4. Функція Кантора $\mathsf{K}(x)$ на $[0, 1]$ будується наступним чином. Візьмемо $\mathsf{K}(0) = 0$, $\mathsf{K}(1) = 1$, на інтервалі $(1/3,\ 2/3)$ покладемо $\mathsf{K}(x) = 1/2$. На двох відрізках, що залишилися, в середніх відкритих інтервалах з довжинами $(1/3)^2$ покладемо $\mathsf{K}(x) = 1/4$ (в лівому відрізку) і $\mathsf{K}(x) = 3/4$ (в правому). На кожному наступному кроці на відрізках, де функція ще не визначалася, в середній третині покладемо $\mathsf{K}(x)$ рівною півсумі вже визначених сусідніх значень зліва та справа. В усіх точках y, що не входять до об'єднання всіх вказаних інтервалів, беремо точки x з цих інтервалів і покладемо $\mathsf{K}(y) := \sup\{\mathsf{K}(x), x < y\}$.

1) Показати, що $\mathsf{K}(x)$ вимірна за Лебегом. 2) Знайти $\int\limits_{[0,1]} \mathsf{K}(x) \, d\lambda_1(x)$.

Б11

Г1. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровна за Лебегом на будь-якому відрізку скінченної довжини та періодична з періодом $T > 0$. Довести, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda_1 = \int_{[a+T, b+T]} f \, d\lambda_1.$$

І1. Нехай $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}\} \subset \mathcal{F}$, $\lambda(\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}) < +\infty$ і відомі міри множин A, B, C, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$, $\mathsf{B} \cap \mathsf{C}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$. Обчислити:

1) $\int_{\mathsf{X}} |\mathrm{I}_{\mathsf{A}} - \mathrm{I}_{\mathsf{B}}| \, d\lambda$;

2) $\int_{\mathsf{X}} |\mathrm{I}_{\mathsf{A}} - 2\mathrm{I}_{\mathsf{B}}| \, d\lambda$;

3) $\int_{\mathsf{X}} |3\mathrm{I}_{\mathsf{A}} - \mathrm{I}_{\mathsf{B}}| \, d\lambda$;

4) $\int_{\mathsf{X}} |2\mathrm{I}_{\mathsf{A}} - 3\mathrm{I}_{\mathsf{B}}| \, d\lambda$;

5) $\int_{\mathsf{X}} |\mathrm{I}_{\mathsf{A}} + \mathrm{I}_{\mathsf{B}} - \mathrm{I}_{\mathsf{C}}| \, d\lambda$;

6) $\int_{\mathsf{X}} |\mathrm{I}_{\mathsf{A}} - 2\mathrm{I}_{\mathsf{A}}\mathrm{I}_{\mathsf{B}}| \, d\lambda$;

7) $\int_X |I_A + 2I_B - I_C|\, d\lambda$;

8) $\int_L X|2I_A + 3I_B - I_C|\, d\lambda$;

9) $\int_X |I_A - 2I_B + I_C|\, d\lambda$;

10) $\int_X |I_A + I_B - 2I_B I_C|\, d\lambda$.

12. Нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$. Обчислити інтеграли $\int\limits_A f_+\, d\lambda_1,\ \int\limits_A f_-\, d\lambda_1,\ \int\limits_A |f|\, d\lambda_1,\ \int\limits_A f\, d\lambda_1$, якщо:

1) $f(x) = (-1)^{[x]},\ A = [-3, 5]$;

2) $f(x) = (-1)^{[x]}[x],\ A = [-4, 4)$;

3) $f(x) = [x],\ A = [-4, 4]$;

4) $f(x) = (-1)^{[x^2]},\ A = [0, \sqrt{6}]$;

5) $f(x) = [x] \operatorname{sign} \cos \pi x,\ A = [0, 6]$;

6) $f(x) = [x|x|],\ A = [-2, 2]$;

7) $f(x) = \operatorname{sign} \cos \pi x,\ A = [-3, 3]$;

8) $f(x) = [\operatorname{arctg} x],\ A = [-9, 9]$;

9) $f(x) = [x][2 \sin x],\ A = [0, \pi]$;

10) $f(x) = [\arcsin x],\ A = [-1, 1]$.

13. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}_\infty} p\, d\lambda_1$, якщо:

1) $p = \sin I_A,\ A = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} \big(n, n + 2^{-|n|}\big)$;

2) $p = \sin 2I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \big[n, n + 3^{-n}\big)$;

3) $p = -I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(n^2, n^2 + \dfrac{1}{n(n+1)}\Big)$;

4) $p = \operatorname{sh} I_A + I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \big(n + 3^{-n}, n + 2^{-n}\big)$;

5) $p = \operatorname{arctg} I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(n!, n! + \dfrac{1}{n!}\Big)$;

6) $p = \ln(1 + I_A),\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big[6n, 6n + \dfrac{e}{n!}\Big)$;

7) $p = 10I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big[\dfrac{5}{n} - \dfrac{1}{n(n+1)}, \dfrac{5}{n}\Big)$;

8) $p = I_A(I_A + 1),\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{9n(n+1)}, \dfrac{1}{n}\Big)$;

9) $p = 3I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(\dfrac{7}{n}, \dfrac{7}{n} + \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}\Big)$;

10) $p(x) = -I_A(|x|),\ x \in \mathbb{R},\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(\dfrac{100}{n} - \dfrac{1}{n!}, \dfrac{100}{n}\Big)$.

14. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} p\, d\lambda_2$, якщо:

1) $p = 2 \sin I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \big(n, n + 2^{-n}\big) \times \big(n, n + 3^{-n}\big)$;

2) $p = I_A + 2 \sin I_A,\quad A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \big(n, n + 2^{-n}\big) \times \big(m, m + 2^{-m}\big)$;

3) $p = \operatorname{arctg} 3I_A,\quad A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \big(n, n + 2^{-n}\big) \times \Big(m, m + \dfrac{1}{m!}\Big)$;

4) $p = \operatorname{sh} I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \big[n, n + 3^{-|n|}\big) \times \Big(m, m + \dfrac{1}{m!}\Big)$;

5) $p = I_A(1 + I_A),\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \big[n, n + 5^{-n}\big) \times \big[0, 3^n\big)$;

6) $p = I_A(2 + I_A),\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \big(n, n + 7^{-n}\big) \times \big[0, 2^n\big]$;

7) $p = \operatorname{sh} I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(n^2, n^2 + \dfrac{1}{(n!)^2}\Big) \times \big(0, n!\big)$;

8) $p = \ln(1 + I_A),\quad A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \Big(n^2, n^2 + \dfrac{1}{n!}\Big) \times \Big(3m^2, 3m^2 + \dfrac{2^m}{m!}\Big)$;

9) $p = I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \big[n, n + 2^{-n}\big] \times \big[m, m + 1\big)$;

10) $p = I_A,\ A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(n, n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) \times \Big(n, n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

15. Нехай λ_F – міра Лебега-Стілтьєса в $\mathbb{R}$, породжена функцією F. Довести, що $f \in L(\mathbb{R}, \lambda_F)$ та обчислити $\int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda_F$, якщо:

1) $F(x) = [x]\, I_{[0,100)}(x) + 100\, I_{[100,+\infty)}(x),\quad f(x) = 2^x$;

2) $F(x) = [x]\, I_{[0,100)}(x) + 100\, I_{[100,+\infty)}(x),\quad f(x) = \sin x$;

3) $F(x) = [2x]\, I_{[0,10)}(x) + 20\, I_{[10,+\infty)}(x),\quad f(x) = 3^x$;

4) $F(x) = [2x]\, I_{[0,10)}(x) + 20\, I_{[10,+\infty)}(x),\quad f(x) = F(x)$;

5) $F(x) = [x]\, I_{[0,100)}(x) + 100\, I_{[100,+\infty)}(x),\quad f(x) = F(x)$;

6) $F(x) = [x]\, I_{[0,100)}(x) + 100\, I_{[100,+\infty)}(x),\quad f(x) = F^2(x)$;

7) $F(x) = [x^2]\, I_{[0,100)}(x) + 10000\, I_{[100,+\infty)}(x),\quad f(x) = x^2$;

8) $F(x) = [x^2]\, I_{[0,100)}(x) + 10000\, I_{[100,+\infty)}(x),\quad f(x) = x^4$;

9) $F(x) = [x^2]\,\mathrm{I}_{[0,100)}(x) + 10000\,\mathrm{I}_{[100,+\infty)}(x), \quad f(x) = e^{x^2}$;

10) $F(x) = -100\,\mathrm{I}_{(-\infty,-99)}(x) + [x]\,\mathrm{I}_{[-99,100)}(x) + 100\,\mathrm{I}_{[100,+\infty)}(x), \quad f(x) = x^2$.

ЗАНЯТТЯ 12
ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. *Зліченна адитивність інтеграла Лебега.*
2. *Елементарні властивості інтеграла Лебега.*
3. *Зв'язок між собою інтегралами Лебега і Рімана.*
4. *Зв'язок між собою інтегралами Лебега-Стілтьєса і Рімана-Стілтьєса.*
5. *Критерій Лебега інтегровності за Ріманом.*

А12

В задачах заняття 12 λ – міра на вимірному просторі $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$, λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$, λ_2 – міра Лебега на $\mathbb{R}^2$.

1. Нехай $f(x) = \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

1) Обчислити інтеграл $\int\limits_{[0,\pi]} f\,d\lambda_1$. 2) Чи є функція f інтегровною за Ріманом на $[0,\pi]$?

2. Довести нерівності

1) $2/\sqrt[4]{e} \le \int\limits_{[-1,1]} e^{x^2+x}\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x) \le 2e^2$;

2) $3\pi e \le \int\limits_{\mathsf{A}} e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)^{-1}\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y) \le \dfrac{3\pi e^4}{4}$, де $\mathsf{A} = \left\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.

3. Довести нерівність $\int\limits_{[0,1]} e^{-x}\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x) \le \int\limits_{[0,1]} e^{-x^2}\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x)$.

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{d\lambda_1(x)}{[x+1][x+2]}$; 2) $\int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{d\lambda_1(x)}{[x]!}$.

5. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – довільна функція. Довести, що функція $f(x)\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x), x \in \mathbb{R}$, є борельовою і $\int\limits_{\mathbb{R}} f\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}\,d\lambda_1 = 0$.

6. Нехай $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha},\ x \ge 1$.

1) Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається абсолютно? умовно?

2) Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ вірно, що $f \in \mathsf{L}([1,+\infty),\lambda_1)$?

7. Нехай $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – деяка функція. Довести, що $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R},\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)| < +\infty$. При цьому

$$\forall\,\mathsf{A} \subset \mathbb{R} :\ \int\limits_{\mathsf{A}} f\,d\lambda = \sum_{k\in\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}} f(k).$$

8. Нехай $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$, $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\,d\lambda(x)$; 2) $\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}\,d\lambda(x)$; 3) $\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda(x)$; 4) $\int\limits_{[1,+\infty)} \dfrac{d\lambda(x)}{x(x+1)}$.

9. Нехай $F(x) = (x^2+[x])\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x)$, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса. Обчислити інтеграл $\int\limits_{[-10,10]} x\,d\lambda_F(x)$.

10. Нехай $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}, \quad x \in (0,1), \quad x_k \in \{0,1\}, \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k \ne 1$, – це двійковий розклад числа x. Покладемо $f_k(x) = 2x_k - 1$, $k \ge 1$. Показати, що

1) $\int\limits_{(0,1)} f_k(x)f_j(x)\,d\lambda_1(x) = 0,\ k \ne j$; 2) $\int\limits_{(0,1)} f_k^2(x)\,d\lambda_1(x) = 1$.

Д1. Нехай $\mathsf{E} \subset [0,2\pi]$, $\lambda_1(\mathsf{E}) = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що

$$\int_{\mathsf{E}} |\cos(nx)|\,d\lambda_1(x) \ge \frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}.$$

Д2. Нехай A – замкнена підмножина відрізка $[a,b]$ і $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$. Довести, що функція I_{A} інтегровна за Ріманом на $[a,b]$.

Д3. Навести приклад інтегровної за Ріманом на відрізку $[a, b]$ функції, множина точок розриву якої щільна в $[a, b]$.
Д4. Нехай $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція така, що
$$\int_{\mathsf{X}} f^2\, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} f^3\, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} f^4\, d\lambda < +\infty.$$
Довести, що $\lambda\big(\{x \in \mathsf{X} :\ f(x) \notin \{0, 1\}\}\big) = 0$.

Б12

Г1. Нехай $\mu_1,\ \mu_2$ – міри на вимірному просторі $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$, $\mu := \mu_1 + \mu_2$. Довести, що
1) $\mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu) = \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu_1) \cap \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu_2)$; 2) $\forall\, f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu) : \int\limits_{\mathsf{X}} f\, d\mu = \int\limits_{\mathsf{X}} f\, d\mu_1 + \int\limits_{\mathsf{X}} f\, d\mu_2$.

І1. Довести нерівності:

1) $\displaystyle\int\limits_{[0,\pi/2)} e^{-\sin x} \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x) \ge \frac{\pi}{2e}$;

2) $\displaystyle\frac{1}{2} \le \int\limits_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}\,(1 - \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x))\, d\lambda_1(x) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$;

3) $\displaystyle\frac{1}{5} \le \int\limits_{[4,5)} \frac{1}{x}\, \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x) \le \frac{1}{4}$;

4) $\displaystyle\frac{1}{3e} \le \int\limits_{[0,1)} x^2 e^{-x^2}(1 - \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x))\, d\lambda_1(x) \le \frac{1}{3}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]} \sqrt{1 + x^2}\, d\lambda_1(x) \ge \int\limits_{[0,1]} \sqrt{1 + x^4}\, d\lambda_1(x)$;

6) $\displaystyle\int\limits_{[1,2)} \ln x\, d\lambda_1(x) \ge \int\limits_{[1,2)} (\ln x)^2 \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$;

7) $\displaystyle\frac{4\pi}{3} \le \int\limits_{\mathsf{A}} \frac{\mathrm{I}_{\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}(x, y)}{1 + \frac{1}{2}\cos(x^2 + y^2)}\, d\lambda_2(x, y) \le 4\pi$, де $\mathsf{A} = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2\big\}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{\mathsf{A}} \frac{(|x| + |y|)^9 \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)}{\sqrt{1 + |x| + |y|}}\, d\lambda_2(x, y) \le \sqrt{2}$, де $\mathsf{A} = \{(x, y)\ :\ |x| + |y| \le 1\}$;

9) $\displaystyle\int\limits_{\mathsf{A}} \sin^4(x^4 + y^4) \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(y)\, d\lambda_2(x, y) \le \int\limits_{\mathsf{A}} \sin^2(x^4 + y^4)\, d\lambda_2(x, y)$, де $\mathsf{A} = \big\{(x, y) \mid x^4 + y^4 \le 2\pi\big\}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{\mathsf{A}} e^{-(x^2+y^2)}\, d\lambda_2(x, y) \le \int\limits_{\mathsf{A}} e^{-(x^2+y^2)^2} \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_2(x, y)$, де $\mathsf{A} = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\big\}$.

І2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} 2^{-[x]}\, d\lambda_1(x)$;

2) $\displaystyle\int\limits_{[1,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[x]!}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[2x + 1][2x + 3]}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{[-2,+\infty)} e^{-[x]}\, d\lambda_1(x)$;

5) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[3x + 1][3x + 4]}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{[1,+\infty)} \frac{d\lambda_1(x)}{[2x]!}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} 2^{-([x]+[y])}\, d\lambda_2(x, y)$;

8) $\displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} \frac{d\lambda_2(x, y)}{[x]![y]!}$;

9) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[1,+\infty)} \frac{d\lambda_2(x, y)}{[x + y]!}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{[1,+\infty)\times[0,1)} \frac{d\lambda_2(x, y)}{[x - y]!}$.

І3. Довести, що $f \in \mathsf{L}([0, 1], \lambda_1)$, обчислити інтеграл $\int_{[0,1]} f\, d\lambda_1$, і перевірити чи є f інтегровною за Ріманом, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^4, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in \mathbb{Q}, \\ (1 + x^2)^{-1}, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x, & \cos x\in\mathbb{Q},\\ \operatorname{tg}x, & \cos x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \sin x\in\mathbb{Q},\\ \sin^2 x, & \sin x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} x, & \sin x\in\mathbb{Q},\\ \cos^2 x, & \sin x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in\mathbb{Q}\backslash\{0\},\\ \sin^4 x, & x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\{0\};\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} x, & \sin x\in\mathbb{Q},\\ \operatorname{ch}^2 x, & \sin x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} x^{10}, & x\in\mathbb{Q},\\ \operatorname{sh}^2 x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ch}x, & x\in\mathbb{Q},\\ (1+x^2)^{-1}, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q};\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sh}x, & x\in\mathbb{Q},\\ (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$

I4. Для яких $\alpha\in\mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ і для яких $\alpha\in\mathbb{R}$ виконується $f\in\mathsf{L}([1,+\infty),\lambda_1)$, якщо для $x\geq 1$:

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^\alpha}$;

2) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^\alpha}$;

3) $f(x)=\dfrac{\sin x^6}{x^\alpha}$;

4) $f(x)=\sin x^\alpha$?

Чи збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ і чи $f\in\mathsf{L}([1,+\infty),\lambda_1)$, якщо для $x\in\mathbb{R}$:

5) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\,\mathrm{I}_{[k,k+1)}(x)$;

6) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k}{k}\,\mathrm{I}_{[k,k+1)}(x)$;

7) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\,\mathrm{I}_{[k^2,(k+1)^2)}(x)$;

8) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos k}{k^2}\,\mathrm{I}_{[k^2,(k+1)^2)}(x)$;

9) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^3}\,\mathrm{I}_{[k^3,(k+1)^3)}(x)$;

10) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos k\,\mathrm{I}_{[\sqrt{k},\sqrt{k+1})}(x)$?

I5. Нехай $\lambda(\mathsf{A})=|\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}$. Довести, що $f\in\mathsf{L}(\mathsf{A},\lambda)$, та обчислити інтеграл $\int\limits_{\mathsf{A}} f\,d\lambda$, якщо:

1) $f(x)=2^{-|x|},\ x\in\mathsf{A}=\mathbb{R}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(x)},\ x\in\mathsf{A}=[1,+\infty)$;

3) $f(x)=x^{-2},\ x\in\mathsf{A}=[1,+\infty)$;

4) $f(x)=\sin\pi x,\ x\in\mathsf{A}=\mathbb{R}$;

5) $f(x)=\operatorname{ch}x,\ x\in\mathsf{A}=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$;

6) $f(x)=e^x,\ x\in\mathsf{A}=(0,10)\cap\mathbb{N}$;

7) $f(x)=x2^{-x},\ x\in\mathsf{A}=\mathbb{N}$;

8) $f(x)=3^x,\ x\in\mathsf{A}=(-\infty,0]$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)(2x+3)},x\in\mathsf{A}=[0,+\infty)$;

10) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+1)(3x+4)},x\in\mathsf{A}=[0,+\infty)$.

I6. Нехай $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса. Обчислити інтеграл $\int_{\mathsf{A}} f\,d\lambda_F$, якщо:

1) $f(x)=x,\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt,\quad \mathsf{A}=[-1,1]$;

2) $f(x)=\cos^2 x,\quad F(x)=2x,\quad \mathsf{A}=[0,10]$;

3) $f(x)=x,\quad F(x)=e^x+[x],\quad \mathsf{A}=[0,10]$;

4) $f(x)=x,\quad F(x)=\operatorname{arctg}x+[3x],\quad \mathsf{A}=[0,1]$;

5) $f(x)=x^2,\quad F(x)=(1-e^{-x})\,\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x),\quad \mathsf{A}=[0,1]$;

6) $f(x)=\frac{x}{x+1},\quad F(x)=x^2\,\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x),\quad \mathsf{A}=[0,1]$;

7) $f(x)=\operatorname{ch}x,\quad F(x)=x^3\,\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x),\quad \mathsf{A}=[-1,1]$;

8) $f(x)=x^3,\quad F(x)=(1-e^x+[x])\,\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x),\quad \mathsf{A}=[0,10]$;

9) $f(x)=x^3,\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^4}+[x|x|],\quad \mathsf{A}=[0,3]$;

10) $f(x)=x^2,\quad F(x)=-\mathrm{I}_{(-\infty,-\pi/2)}(x)+\sin x\,\mathrm{I}_{[-\pi/2,\pi/2)}(x)+\mathrm{I}_{[\pi/2,\infty)}(x),\quad \mathsf{A}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

ЗАНЯТТЯ 13
ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Контрольні запитання

1. *Теорема про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності.*
2. *Теорема Бепо Леві і Фату.*
3. *Теорема Фату.*
4. *Теорема Лебега про мажоровну збіжність.*

A13

В задачах заняття 13 λ – міра на вимірному просторі $(\mathsf{X},\mathcal{F})$.

1. Знайти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,100]} \cos^{2n}\pi x\; d\lambda_1(x)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,100]} \cos^{2n}\pi x\; d\lambda(x)$,

де λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$, $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}|$, $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{100}\frac{x^{40}}{1+x^{40}}\sin^n x\,dx$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{arctg}^n x\,dx$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(x+\frac{x^4}{n}\Big)\Big\}\,dx$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

3. Нехай $\{f_n:\mathsf{X}\to\mathbb{R}\;:\; n\ge 0\}$ – послідовність $\mathcal{F}$-вимірних функцій, λ – скінченна міра і $f_n\to f_0 \pmod{\lambda}$. Довести, що

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathsf{X}}\sin f_n\,d\lambda = \int\limits_{\mathsf{X}}\sin f_0\,d\lambda$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathsf{X}} e^{-f_n^2}\,d\lambda = \int\limits_{\mathsf{X}} e^{-f_0^2}\,d\lambda$.

4. Нехай функція $g:\mathsf{X}\to\mathbb{R}$ – вимірна і для кожного $n\in\mathbb{N}$

$$g_n(x)=\begin{cases} g(x), & \text{якщо } |g(x)|<n,\\ n, & \text{якщо } g(x)\ge n,\\ -n, & \text{якщо } g(x)\le -n.\end{cases}$$

Довести, що $g\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\mathsf{X}}|g_n|\,d\lambda<+\infty$. При цьому $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathsf{X}} g_n\,d\lambda=\int\limits_{\mathsf{X}} g\,d\lambda$.

5. Нехай λ – повна міра, $\mathsf{A}\in\mathcal{F}$, функції $f_n:\mathsf{A}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-вимірні і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\mathsf{A}}|f_n|\,d\lambda<+\infty$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається абсолютно майже скрізь відносно міри λ на A, його сума є інтегровною на A функцією і виконується рівність

$$\int\limits_{\mathsf{A}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\mathsf{A}} f_n\,d\lambda.$$

6. Нехай $f\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$, $\{\mathsf{A}_n : n\ge 1\}\subset\mathcal{F}$ і $\lambda(\mathsf{A}_n)\to 0$. Довести, що $\int\limits_{\mathsf{A}_n} f\,d\lambda\to 0$.

7. Для функції $f\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$ довести, що $k\lambda(\{x\in\mathsf{X}\mid |f(x)|\ge k\})\to 0,\quad k\to\infty$.

8. Нехай $f_n:\mathsf{X}\to\mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $n\ge 0$, λ – скінченна міра і $f_n\xrightarrow{\lambda} f_0$. Довести, що для довільної неперервної і обмеженої на $\mathbb{R}$ функції h справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathsf{X}} h(f_n(x))\,d\lambda(x)=\int\limits_{\mathsf{X}} h(f_0(x))\,d\lambda(x).$$

Д1. Нехай $f\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$ і $\lambda(\mathsf{X})<+\infty$. Довести, що

$$\int\limits_{\mathsf{X}} f(x)\,d\lambda(x)=\lim_{h\to 0+}\sum_{k=-\infty}^{\infty} kh\lambda(\{x\mid kh\le f(x)<(k+1)h\}).$$

Д2. Нехай $\{f_n\;:\; n\ge 0\}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції і $\lambda(\mathsf{X})<+\infty$. Довести, що

1) $f_n\xrightarrow{\lambda} f_0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int\limits_{\mathsf{X}}\frac{|f_n-f_0|}{1+|f_n-f_0|}\,d\lambda=0.$

2) $f_n\xrightarrow{\lambda} f_0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int\limits_{\mathsf{X}}\min\{1,|f_n-f_0|\}\,d\lambda=0.$

Д3. Нехай $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$, $g \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$ і $\forall n \geq 1\ \forall x \in \mathsf{X} : |f_n(x)| \leq g(x)$. Довести, що функція $f(x) = \varlimsup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ інтегровна на X і $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathsf{X}} f_n \, d\lambda \leq \int\limits_{\mathsf{X}} f \, d\lambda$.

Д4. Нехай $\{f_n : n \geq 0\} \subset \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$, $f_n \geq 0$, $f_n \to f_0 \pmod{\lambda}$ і $\int\limits_{\mathsf{X}} f_n \, d\lambda \to \int\limits_{\mathsf{X}} f_0 \, d\lambda$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathsf{X}} |f_n - f_0| \, d\lambda = 0.$$

Д5. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$, $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$. Послідовність $\{f_n\}$ називають *рівномірно інтегровною*, якщо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\{x \mid |f_n(x)|>c\}} |f_n(x)| \, d\lambda(x) \to 0, \quad c \to \infty.$$

1) Довести, що послідовність $\{f_n\}$ рівномірно інтегровна тоді і лише тоді, коли

$$\sup_n \int_{\mathsf{X}} |f_n| \, d\lambda < +\infty \quad \text{і} \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathsf{A} \in \mathcal{F},\ \lambda(\mathsf{A}) < \delta :\ \sup_n \int_{\mathsf{A}} |f_n| \, d\lambda < \varepsilon.$$

2) Нехай $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. Довести, що послідовність $\{f_n\}$ рівномірно інтегровна тоді і лише тоді, коли

$$f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda) \quad \text{і} \quad \int\limits_{\mathsf{X}} |f_n - f| \, d\lambda \to 0,\ n \to \infty.$$

3) Нехай $\exists \delta > 0 : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathsf{X}} |f_n|^{1+\delta} \, d\lambda < +\infty$. Довести, що послідовність $\{f_n\}$ рівномірно інтегровна.

Б13

В задачах з Б13 λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Г1. Нехай $f_n,\ g_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, $n \geq 0$, λ – скінченна міра і $f_n \xrightarrow{\lambda} f_0$, $g_n \xrightarrow{\lambda} g_0$. Довести, що для довільної неперервної і обмеженої на $\mathbb{R}^2$ функції h справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathsf{X}} h(f_n(x), g_n(x)) \, d\lambda(x) = \int\limits_{\mathsf{X}} h(f_0(x), g_0(x)) \, d\lambda(x).$$

Г2. Побудувати послідовність $\{f_n : n \geq 0\} \subset \mathsf{L}([0,1], \lambda_1)$ таку, що:
1) $f_n \to f_0 \pmod{\lambda_1}$; 2) $\int\limits_{[0,1]} f_n \, d\lambda_1 \to \int\limits_{[0,1]} f_0 \, d\lambda_1$;
3) не існує такої функції $g \in \mathsf{L}([0,1], \lambda_1)$, щоб $\forall n \geq 1 : |f_n| \leq g \pmod{\lambda_1}$ на $[0,1]$.

І1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-nx^2} \, d\lambda_1(x)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-\frac{x^2}{n}} \, d\lambda_1(x)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\sin^n x}{1+x^2} \, d\lambda_1(x)$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-nx} \operatorname{arctg} x \, d\lambda_1(x)$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-\frac{x^2}{n}} \frac{1}{1+x^2} \, d\lambda_1(x)$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} n\Big(e^{-\frac{x}{n}} - 1\Big) \frac{1}{1+x^4} \, d\lambda_1(x)$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x}\Big(1 + \sin^n \frac{1}{x}\Big) \, d\lambda_1(x)$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} (1 + \cos^n x^4)(1+x^2)^{-1} \, d\lambda_1(x)$;
9) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} n \sin \frac{x}{n} \cdot (1+x^4)^{-1} \, d\lambda_1(x)$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} n e^{-x} \Big(\sqrt[5]{1 + \frac{x}{n}} - 1\Big) \, d\lambda_1(x)$.

І2. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1$ та $\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_1$. Чи будуть отримані значення рівними, якщо:

1) $f_n(x) = \mathrm{I}_{(n,n+1]}(x)$;
2) $f_n(x) = n^2 \mathrm{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;
3) $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$;
4) $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$;
5) $f_n(x) = (n - n^2 x)\mathrm{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;
6) $f_n(x) = (n - n^3 x^2)\mathrm{I}_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}(x)$;
7) $f_n(x) = (n^2 - n^4 x)\mathrm{I}_{\left[0,\frac{1}{n^2}\right)}(x)$;
8) $f_n(x) = n^2(1 - nx)\mathrm{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;
9) $f_n(x) = n^{-\alpha}\mathrm{I}_{[n,2n]}(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$;
10) $f_n(x) = n^{\alpha} e^{-nx}\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$?

І3. Нехай функції $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, є вимірними за Лебегом, $f_n \to f \pmod{\lambda_1}$ і $g_n \to g \pmod{\lambda_1}$. Знайти такі границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\sin f_n(x)}{1+x^2} \, d\lambda_1(x)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{f_n^2(x)}{1+f_n^2(x)} e^{-x^2} \, d\lambda_1(x)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x-f_n^2(x)} \, d\lambda_1(x)$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\min(|f_n(x)|, 1)}{1+x^2+f_n^2(x)+g_n^2(x)} \, d\lambda_1(x)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\min(f_n^2(x),3)}{1+x^4+f_n^2(x)+|g_n(x)|}\,d\lambda_1(x)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x|-f_n^2(x)}\operatorname{arctg}(f_n(x)+g_n^2(x))\,d\lambda_1(x)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,100]} \dfrac{1}{\sqrt{x}+g_n^2(x)}\sin(f_n^2(x)-g_n(x))\,d\lambda_1(x)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,10]} \dfrac{1}{x^{3/4}+|f_n(x)|}\cdot\dfrac{g_n(x)}{1+g_n^2(x)}\,d\lambda_1(x)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{f_n(x)+g_n(x)}{(1+f_n^2(x))(1+g_n^2(x))}\,d\lambda_1(x)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\cdot\dfrac{f_n(x)\sin(f_n(x)-g_n(x))}{1+|f_n(x)|}\,d\lambda_1(x)$.

I4. Нехай λ_F – міра Лебега-Стілтьєса на $\mathbb{R}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda_F$, якщо для довільних $x\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$:

1) $F(x)=\mathrm{I}_{[0,1)}(x)+2\mathrm{I}_{[1,+\infty)}(x),\quad f_n(x)=\sqrt[n]{|x|}$;
2) $F(x)=-2\mathrm{I}_{(-\infty,-1)}(x)+[x]\mathrm{I}_{[-1,2)}(x)+2\mathrm{I}_{[2,+\infty)}(x),\quad f_n(x)=\sqrt[n]{|x|+|x|^n}$;
3) $F(x)=5\mathrm{I}_{[0,1)}(x)+7\mathrm{I}_{[1,+\infty)}(x),\quad f_n(x)=\mathrm{I}_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}(x)+\sqrt[n]{|x|}$;
4) $F(x)=[x]\mathrm{I}_{[,5)}(x)+5\mathrm{I}_{[5,+\infty)}(x),\quad f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$;
5) $F(x)=-6\mathrm{I}_{(-\infty,-5)}(x)+[x]\mathrm{I}_{[-5,5)}(x)+5\mathrm{I}_{[5,+\infty)}(x),\quad f_n(x)=\dfrac{|x|^n}{1+|x|^n}$;
6) $F(x)=[2x], f_n(x)=\sin^{2n}\pi x\mathrm{I}_{[0,100]}(x)$;
7) $F(x)=[2x], f_n(x)=2^{-|x|}\sin^{2n}\pi x$;
8) $F(x)=[2x], f_n(x)=3^{-|x|}\cos^{2n}2\pi x$;
9) $F(x)=[2x], f_n(x)=\left|\cos^n\frac{1}{x}\right|\mathrm{I}_{(0,+\infty)}(x)$;
10) $F(x)=[x|x|], f_n(x)=e^{-x^2}\sin^{2n}\pi x^2$.

ЗАНЯТТЯ 14
ІНТЕГРАЛ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Контрольні запитання

1. *Теорема про неперервність інтеграла Лебега за параметром.*
2. *Теорема про диференційовність інтеграла Лебега за параметром.*
3. *Теорема про заміну змінної в інтегралі Лебега.*

A14

В задачах заняття 14 λ – міра на вимірному просторі $(\mathsf{X},\mathcal{F})$, λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$, λ_2 – міра Лебега на $\mathbb{R}^2$.

1. Обчислити
$$\lim_{t\to 0}\int_{[0,1]}\frac{1}{\sqrt{x}+|\sin tx|}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x).$$

2. Нехай
$$g(t)=\int_{[0,+\infty)} e^{-tx^2}\frac{[x]}{1+[x^2]}\;d\lambda_1(x),\quad t>0.$$
Довести, що $g\in\mathbb{C}((0,+\infty))$.

3. Довести, що $g\in\mathbb{C}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ для $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|t|(x^2+y^2)}([x]+[y])\;d\lambda_2(x,y),\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4. Нехай $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ – борельова функція і
$$\exists C>0\;\forall\alpha>0:\int_{[0,+\infty)}\frac{\sin^2\alpha x}{\alpha^2 x}f(x)\;d\lambda_1(x)\le C.$$
Довести, що $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} xf(x)\;d\lambda_1(x)<+\infty$.

5. Нехай функції $f(x),\ x\in\mathbb{R}$ і $xf(x), x\in\mathbb{R}$, інтегровні на $\mathbb{R}$ відносно міри Лебега. Довести, що функція

$$g(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{itx}f(x)\,d\lambda_1(x),\quad t\in\mathbb{R},$$

неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$, та знайти похідну g'.

6. Нехай функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна за Лебегом і обмежена на $\mathbb{R}$. Довести, що функція

$$g(t)=\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos tx^2}{1+x^6}\,f(x)\;d\lambda_1,\quad t\in\mathbb{R},$$

неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$, та знайти похідну g'.

7. Обчислити інтеграл

$$I(t)=\int_{[0,+\infty)} \frac{e^{-tx^2}-e^{-x^2}}{x}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x),\quad t>0.$$

8. Нехай $\lambda(\mathsf{X})<+\infty,\ f,g$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції і

$$\forall\, c\in\mathbb{R}:\ \lambda(\{x\in\mathsf{X}\mid f(x)<c\})=\lambda(\{x\mid g(x)<c\}).$$

Довести, що $f\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)\Leftrightarrow g\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$. При цьому $\int\limits_{\mathsf{X}} f(x)\,d\lambda(x)=\int\limits_{\mathsf{X}} g(x)\,d\lambda(x)$.

9. Нехай $f\in\mathsf{L}(\mathbb{R},\lambda_1)$, $a>0$. Довести, що

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a^{-1}x)$ збігається абсолютно м.с. відносно λ_1;

2) для $g(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a^{-1}x)\ \pmod{\lambda_1}$ буде $\int_{[0,a]} g(x)\,d\lambda_1(x)=a\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda_1(x)$.

Д1. Відомо, що $f,\ g:\mathsf{X}\to\mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, для деякого $p>1$ $|f|^p,\ |g|^p\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$. Довести, що функція

$$F(t)=\int_{\mathsf{X}}|f(x)+tg(x)|^p\,d\lambda(x),\ t\in\mathbb{R},$$

диференційовна на $\mathbb{R}$ і $F'(0)=p\int_{\mathsf{X}}|f(x)|^{p-2}f(x)g(x)\,d\lambda(x)$.

Д2. Нехай $f\in\mathsf{L}(\mathbb{R},\lambda_1)$, $a>0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-a}f(nx)=0\ \pmod{\lambda_1}$.

Д3. Нехай $f,g:\mathsf{X}\to[0,+\infty)$ – $\mathcal{F}$-вимірні невід'ємні функції,

$$\mathsf{A}_y:=\{x\in\mathsf{X}\mid\ g(x)>y\},\quad y>0,\quad F(y):=\int_{\mathsf{A}_y} f(x)\,d\lambda(x).$$

Довести, що $\int_{\mathsf{X}} f(x)g(x)\,d\lambda(x)=\int_{(0,+\infty)} F(y)\,d\lambda_1(y)$.

Б14

Г1. Нехай функція $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ вимірна за Лебегом і обмежена. Довести, що функція

$$g(t)=\int\limits_{[0,+\infty)} e^{-tx}f(x)\,d\lambda_1(x),\ t\in(0,+\infty),$$

нескінченно диференційовна на $(0,+\infty)$, і знайти $g^{(k)},\ k\in\mathbb{N}$.

Г2. За допомогою диференціювання за параметром обчислити інтеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_{[0,+\infty)}(1+x^2)^{-1}\ln(\alpha^2+x^2)\,d\lambda_1(x),\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

І1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{t\to0}\int\limits_{[0,+\infty)}\dfrac{d\lambda_1(x)}{|t|+1+x^3}$;

2) $\lim\limits_{t\to1}\int_{\mathbb{R}}\dfrac{d\lambda_1(x)}{1+x^2+t^2}$;

3) $\lim\limits_{t\to0}\int\limits_{[-1,1]}\dfrac{d\lambda_1(x)}{t^2+\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\lim\limits_{t\to0}\int\limits_{[2,+\infty)}\dfrac{d\lambda_1(x)}{t^2+x^2+x-2}$;

5) $\lim\limits_{t\to0}\int\limits_{[0,1]}\ln(|t|+x)\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x)$;

6) $\lim\limits_{t\to0}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(xyt)\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y)$;

7) $\lim\limits_{t\to0}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2+t)\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(y)\,d\lambda_2(x,y)$;

8) $\lim\limits_{t\to0}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2+t^2)\,d\lambda_2(x,y)$;

9) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{\mathsf{A}} \ln\sqrt{t^2+x^2+y^2}\,d\lambda_2(x,y), \quad \mathsf{A}=\big\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\big\}$;

10) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{\mathsf{A}} \dfrac{d\lambda_2(x,y)}{t^2+\sqrt{t^2+1-x^2-y^2}}, \quad \mathsf{A}=\big\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\big\}$.

I2. Довести, що функція $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ неперервна, якщо:

1) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-(1+t^2)[x^2]}\operatorname{sign}\big(\sin^2 x-\frac{1}{2}\big)\,d\lambda_1(x)$;

2) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} \dfrac{\cos(tx+t^4\sin x)}{1+x^4}[x]^2\,d\lambda_1(x)$;

3) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} \dfrac{\operatorname{arctg}(t^4\ln(1+x^2))}{1+[x]^2}\operatorname{sign}((x-1)\cos x)\,d\lambda_1(x)$;

4) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}[x]^4\dfrac{\operatorname{sign}(\cos x)}{2+\sin(tx+t^8x^2)}\,d\lambda_1(x)$;

5) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} \dfrac{e^{-[x]^4}\ln(2+t^4x^4)}{2+\operatorname{sign}(\cos x)}\,d\lambda_1(x)$;

6) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} [x]^2(1+x^4)^{-1}\sin(t\cos^2 x)\,d\lambda_1(x)$;

7) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+|y|)}\cos(xyt)\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_2(x,y)$;

8) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{arctg}(\operatorname{ch}([xy]))(1+t^2+(x^2+y^2)^2)^{-1}\,d\lambda_2(x,y)$;

9) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+[y]^2)}\sin(xyt)\,d\lambda_2(x,y)$;

10) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} \sin(x+[y]+t)(1+t^2+(x^2+y^2)^2)^{-1}\,d\lambda_2(x,y)$.

I3. Довести, що функція $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$, і знайти g', якщо:

1) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} \dfrac{\sin(tx^4)}{1+x^8}\operatorname{sign}(\cos e^{-x})\,d\lambda_1$;

2) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\cos(tx^{10})[x^2]\,d\lambda_1(x)$;

3) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-[x]^2}[x^{10}]\ln(1+t^2x^2)\,d\lambda_1(x)$;

4) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} \operatorname{arctg}(tx)\operatorname{sign}(\cos 4x)(1+[x]^8)^{-1}\,d\lambda_1(x)$;

5) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} \operatorname{arctg}(t^2x^4)\operatorname{sign}(\cos x^2)(1+[x]^8)^{-1}\,d\lambda_1(x)$;

6) $g(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\operatorname{sign}(\sin x)(1+t^2x^2)^{-1}\,d\lambda_1(x)$;

7) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)}\sin(tx)\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(y)\,d\lambda_2(x,y)$;

8) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} \sin(t([x]+y))(1+(x^2+y^2)^4)^{-1}\,d\lambda_2(x,y)$;

9) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-t^2(x^2+y^2)}(1+(x^2+y^2)^3)^{-1}\,d\lambda_2(x,y)$;

10) $g(t)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}(\sin^2(tx)+\cos^2(ty))\,d\lambda_2(x,y)$.

ЗАНЯТТЯ 15
ЗАРЯДИ. АБСОЛЮТНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Контрольні запитання

1. *Означення заряду.*
2. *Теореми про розклад Гана і розклад Жордана.*
3. *Означення абсолютної неперервності і сингулярності заряду відносно міри.*
4. *Теорема Радона-Никодима.*
5. *Теорема про розклад Лебега.*
6. *Означення та властивості абсолютно неперервних функцій на* $[a, b]$.

А15

В задачах заняття 15 $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою, λ_1 – міра Лебега на борелівській σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{AC}([a, b])$ – набір функцій, абсолютно неперервних на $[a, b]$.

1. Нехай $\delta_0(\mathsf{A}) = \mathrm{I}_{\mathsf{A}}(0)$, $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, і $\nu = \lambda_1 - \delta_0$. Знайти розклад Гана простору $\mathbb{R}$ відносно заряду ν та розклад Жордана заряду ν.

2. На $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ дані міра Лебега λ_1, міра $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A) та міра Лебега–Стілтьєса λ_F, породжена функцією $F(x) = [x^3]$.

1) З'ясувати, які з цих мір є абсолютно неперервними відносно інших.
2) У випадках абсолютної неперервності знайти похідну Радона–Никодима.
3) З'ясувати, яка з цих мір є сингулярною відносно іншої.

3. На $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ дані міра Лебега–Стілтьєса λ_F та заряд ν_G, породжені відповідно функціями $F(x) = [x^3|x|]$ та $G(x) = 1 - [x^2]$.

1) З'ясувати, чи буде ν_G абсолютно неперервним або сингулярним відносно λ_F.
2) У випадку абсолютної неперервності знайти похідну Радона–Никодима.

4. Нехай $\mu_1,\ \mu_2,\ \lambda - \sigma$-скінченні міри на σ-алгебрі $\mathcal{F}$, $\mu_1 \ll \lambda$, $\mu_2 \ll \lambda$. Довести, що

1) $\mu = \mu_1 + \mu_2 \ll \lambda$; 2) $\dfrac{d\,\mu}{d\lambda} = \dfrac{d\,\mu_1}{d\lambda} + \dfrac{d\,\mu_2}{d\lambda} \pmod{\lambda}$.

5. Нехай $\nu = \nu_+ - \nu_-$ є розклад Жордана заряду ν. Довести, що $\nu_+ \perp \nu_-$.

6. Нехай $F(x) = e^x \mathrm{I}_{(-\infty,0)}(x) + (e^x + 1)\mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x)$ і λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса, яка розглядається на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1) Зобразити міру λ_F у вигляді $\lambda_F = \lambda_a + \lambda_s$, де $\lambda_a,\ \lambda_s$ – міри на $\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda_a \ll \lambda_1,\ \lambda_s \perp \lambda_1$.
2) Обчислити $\dfrac{d\lambda_a}{d\lambda_1}$.

7. Чи будуть абсолютно неперервними на $[0, 1]$ функції:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$; 2) $g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0? \end{cases}$

8. Нехай $f,\ g \in \mathbb{AC}([a, b])$. Довести, що

1) $fg \in \mathbb{AC}([a, b])$;
2) $f/g \in \mathbb{AC}([a, b])$ (при умові, що $g \neq 0$ на $[a, b]$).

Д1. Нехай

$$\mathsf{X} = \mathbb{N}, \quad \{p_n : n \ge 1\} \subset (0, +\infty), \quad \{q_n : n \ge 1\} \subset (0, +\infty),$$
$$\mathsf{B} = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}, \quad \lambda(\mathsf{A}) = \sum_{n \in \mathsf{A}} p_n, \quad \mu(\mathsf{A}) = \sum_{n \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}} q_n, \quad \mathsf{A} \in 2^{\mathbb{N}}.$$

1) Зобразити міру λ у вигляді суми мір λ_a і λ_s, де $\lambda_a \ll \mu$ і $\lambda_s \perp \mu$.
2) Обчислити $\dfrac{d\lambda_a}{d\mu}$.

Д2. Нехай λ, μ і τ – σ-скінченні міри на $\mathcal{F}$, $\tau \ll \mu$ і $\mu \ll \lambda$. Довести, що $\tau \ll \lambda$ і $\dfrac{d\tau}{d\lambda} = \dfrac{d\tau}{d\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{d\lambda} \pmod{\lambda}$.

Д3. Нехай $\mu_k,\ k \ge 1,\ \mu$ і $\lambda - \sigma$-скінченні міри на $\mathcal{F}$ такі, що

$$\mu(\mathsf{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\mathsf{A}), \quad \mathsf{A} \in \mathcal{F}, \quad \forall\, k \ge 1 : \mu_k \ll \lambda.$$

Довести, що $\mu \ll \lambda$ і $\dfrac{d\mu}{d\lambda} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\mu_k}{d\lambda} \pmod{\lambda}$.

Д4. Нехай $f \in \mathbb{AC}([a,b])$, $g \in \mathbb{AC}([c,d])$, причому g – неспадна функція, $g(c) = a$, $g(d) = b$. Довести, що $f(g(x)) \in \mathbb{AC}([c,d])$.

Д5. Нехай $f \in \mathbb{AC}([a,b])$. Довести, що для будь-якої множини $\mathsf{A} \subset [a,b]$, $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$, буде $\lambda_1(f(\mathsf{A})) = 0$ (тобто, f має N-*властивість Лузіна* на $[a,b]$).

Б15

Г1. Нехай μ_1, μ_2 і μ – міри на $\mathcal{F}$.

1) Довести, що якщо $\mu_1 \perp \mu$ і $\mu_2 \perp \mu$, то $\mu_1 + \mu_2 \perp \mu$.
2) Чи справедливе обернене твердження?

Г2. Нехай λ – σ-скінченна міра, ν – σ-скінченний заряд на $\mathcal{F}$, $\nu \ll \lambda$. Виразити в термінах похідної Радона-Никодима $\dfrac{d\nu}{d\lambda}$ необхідну і достатню умову того, що:

1) ν – скінченний заряд; 2) ν – міра і $\lambda \ll \nu$.

Г3. Нехай μ – σ-скінченна міра на $\mathcal{F}$. Довести, що існує скінченна міра λ на $\mathcal{F}$ така, що $\lambda \ll \mu$ і $\mu \ll \lambda$.

Г4. 1) Нехай $f \in \mathbb{AC}([a,b])$. Довести, що $|f| \in \mathbb{AC}([a,b])$.

2) Нехай $f \in \mathbb{C}([a,b])$, $|f| \in \mathbb{AC}([a,b])$. Довести, що $f \in \mathbb{AC}([a,b])$.

І1. Нехай λ_d – міра Лебега на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Для заряду ν знайти розклад Гана простору $\mathbb{R}^d$ і розклад Жордана, якщо для $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

1) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{[0,10\pi]\cap \mathsf{A}} \sin x \, d\lambda_1(x), \ d = 1;$
2) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{[0,20\pi]\cap \mathsf{A}} \cos x \, d\lambda_1(x) - \lambda_1(\mathsf{A}), \ d = 1;$
3) $\nu(\mathsf{A}) = -3 \int\limits_{\mathsf{A}} e^{-|x|} \, d\lambda_1(x) + 2\lambda_1(\mathsf{A}), \ d = 1;$
4) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{[0,10]\cap \mathsf{A}} (x^2 - 25) \, d\lambda_1(x) - \int\limits_{[10,20]\cap \mathsf{A}} (x - 15) \, d\lambda_1(x), \ d = 1;$
5) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{A}} (5^{2x+1} - 5^x) \, d\lambda_1(x) + 4\lambda_1(\mathsf{A}), \ d = 1;$
6) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{A}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} d\lambda_1(x) - 6\lambda_1(\mathsf{A}), \ d = 1;$
7) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{A}\cap\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 9\pi\}} \cos(x^2 + y^2) \, d\lambda_2(x,y), \ d = 2;$
8) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{A}\cap\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 9\}} e^{x^2+y^2} \, d\lambda_2(x,y) - 5\lambda_2(\mathsf{A}), \ d = 2;$
9) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{A}} [(x+1)^2 + (y-2)^2] \, d\lambda_2(x,y) - 4\lambda_2(\mathsf{A}), \ d = 2;$
10) $\nu(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{A}} (x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y) \, d\lambda_2(x,y) + \lambda_2(\mathsf{A}), \ d = 2.$

І2. Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неспадна і неперервна справа функція, λ_F – відповідна міра Лебега-Стілтьєса на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Зобразити міру λ_F у вигляді $\lambda_F = \lambda_a + \lambda_s$, де $\lambda_a \ll \lambda_1, \ \lambda_s \perp \lambda_1$, та обчислити $\dfrac{d\lambda_a}{d\lambda_1}$, якщо:

1) $F(x) = |x| \cdot [x]$;
2) $F(x) = [x|x|] + x|x|$;
3) $F(x) = [x] + 3x$;
4) $F(x) = [e^x] + e^x$;
5) $F(x) = [2x] + \int\limits_{-\infty}^{x} \dfrac{dt}{1+t^4}$;
6) $F(x) = \operatorname{arctg} x \mathrm{I}_{(-\infty,0)}(x) + \mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)$;
7) $F(x) = (x^2+1)\mathrm{I}_{[0,1)}(x) + 3x^4 \mathrm{I}_{[1,+\infty)}(x)$;
8) $F(x) = -\mathrm{I}_{(-\infty,0)}(x) + \mathrm{I}_{[0,1)}(x) + 2x\mathrm{I}_{[1,+\infty)}(x)$;
9) $F(x) = x\mathrm{I}_{(-\infty,1)}(x) + (x+1)\mathrm{I}_{[1,+\infty,0)}(x)$;
10) $F(x) = \operatorname{arctg} x \mathrm{I}_{(-\infty,0)}(x) + 2^{[x]} \mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x)$.

ЗАНЯТТЯ 16
ІНТЕГРУВАННЯ НА ДОБУТКУ ПРОСТОРІВ

Контрольні запитання

1. *Означення добутку σ-алгебр*
2. *Означення та властивості добутку мір*
3. *Теореми Тонеллі та Фубіні*

А16

В задачах заняття 16 λ_d – міра Лебега на $\mathbb{R}^d$, $\lambda \times \mu$ – добуток мір λ і μ, $\{a\}$ позначає дробову частину числа a.

1. Знайти $\lambda_3(\mathsf{A})$, якщо:
1) $\mathsf{A} = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x \in \mathbb{Q}\}$;
2) $\mathsf{A} = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid (x+y+z) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$;
3) $\mathsf{A} = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid \{xyz\} \in \mathbb{Q}\}$.

2. Нехай $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A} \cap \mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda_1 \times \lambda$. Знайти:

1) $\mu([0,1]^2)$; 2) $\mu(\mathbb{R}^2)$; 3) $\int\limits_{[0,+\infty)^2} 2^{-x-y}\,\mu(x,y)$.

3. Чи буде $f \in \mathsf{L}\big([0,+\infty)^2, \lambda_2\big)$, якщо:
1) $f(x,y) = e^{-x-y} \sin x \sin y \, \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x+y)$;
2) $f(x,y) = e^{-x-y} \sin x \sin y \, \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+y)$;
3) $f(x,y) = \sin x \sin y \, \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\{x\})\, \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(\{y\})$?

4. Нехай $f, g \in \mathsf{L}\big(\mathbb{R}, \lambda_1\big)$, $h(x,t) = f(t)g(x-t)$. Довести, що

1) $h(x,t) \in \mathsf{L}\big(\mathbb{R}, \lambda_1\big)$ як функція від t при майже всіх $x \in \mathbb{R}$ відносно λ_1.

2) $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, d\lambda_1(t) \in \mathsf{L}\big(\mathbb{R}, \lambda_1\big)$.

5. Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою, функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-вимірна. Довести, що f є інтегровною за λ на X тоді і тільки тоді, коли функція

$$g(t) = \lambda\left(\{x :\ |f(x)| > t\}\right)$$

інтегровна за мірою Лебега на $(0,+\infty)$. При цьому буде виконуватись рівність

$$\int\limits_{\mathsf{X}} |f(x)|\, d\lambda(x) = \int\limits_{(0,+\infty)} \lambda\left(\{x :\ |f(x)| > t\}\right)\, d\lambda_1(t).$$

6. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борельова функція. Графіком функції f називається множина

$$\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ f(x) = y\big\}.$$

Довести, що: 1) $\Gamma \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^2\big)$; 2) $\lambda_2(\Gamma) = 0$.

7. Дані вимірні за Лебегом функції $f,\ f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$. Відомо, що для майже всіх $x \in [0,1] \pmod{\lambda_1}$ виконується $f_n(x,y) \xrightarrow{\lambda_1} f(x,y)$ як для функцій аргумента $y \in [0,1]$. Довести, що $f_n(x,y) \xrightarrow{\lambda_2} f(x,y)$ як для функцій аргумента $(x,y) \in [0,1]^2$.

Д1. Нехай $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, n \geq 1$ – борельові функції, $f_n(x, g_n(x)) \xrightarrow{\lambda_1} 0$, $n \to \infty$ для будь-якої послідовності борельових функцій $g_n : [0,1] \to [0,1]$. Довести, що $f_n(x,y) \xrightarrow{\lambda_2} 0$, $n \to \infty$.

Д2. Нехай борельова функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ є такою, що одночасно:
1) для майже всіх $x \in [0,1] \pmod{\lambda_1}$ функція $f(x,\cdot)$ — постійна;
2) для майже всіх $y \in [0,1] \pmod{\lambda_1}$ функція $f(\cdot,y)$ — постійна.

Довести, що існує константа c така, що $f(x,y) = c$ майже скрізь на $[0,1]^2 \pmod{\lambda_2}$.

Д3. Нехай $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – обмежена функція така, що одночасно:

1) для кожного $y \in [0,1]$ функція $x \mapsto f(x,y)$ інтегровна за Ріманом на $[0,1]$;

2) для кожного $x \in [0,1]$ функція $y \mapsto f(x,y)$ інтегровна за Лебегом на $[0,1]$.

Довести, що $F_1(x) = \int_{[0,1]} f(x,y)\, d\lambda_1(y)$ інтегровна за Ріманом на $[0,1]$, $F_2(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy$ інтегровна за Лебегом на $[0,1]$, і їх відповідні інтеграли рівні.

Д4. (*Нерівність Мінковського для інтегралів.*) Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}_{\mathsf{X}}, \lambda)$ і $(\mathsf{Y}, \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}, \mu)$ – вимірні простори з σ-скінченними мірами, функція $f : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_{\mathsf{X}} \overline{\otimes} \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}$-вимірна. Довести, що при $1 \leq p < q < \infty$

$$\int_{\mathsf{Y}} \Big(\int_{\mathsf{X}} |f(x,y)|^p\, d\lambda(x) \Big)^{\frac{q}{p}} d\mu(y) \leq \Big(\int_{\mathsf{X}} \Big(\int_{\mathsf{Y}} |f(x,y)|^q\, d\lambda(x) \Big)^{\frac{p}{q}} d\mu(y) \Big)^{\frac{q}{p}}.$$

Д5. Нехай λ і μ – дві скінченні міри на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Довести, що

$$\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2\, d\lambda(x)\, d\mu(y) < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} x^2\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} y^2\, d\mu(y) < +\infty\,.$$

Д6. Нехай $\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2$ – σ-алгебри вимірних за Лебегом множин в $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^2$ відповідно,

$$\mathsf{A} \in \mathcal{S}_1, \quad f : \mathsf{A} \to [0,+\infty), \quad \mathsf{B} := \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq f(x),\ x \in \mathsf{A}\}\,.$$

Довести, що $\mathsf{B} \in \mathcal{S}_2$ тоді і лише тоді, коли f – вимірна за Лебегом функція, і при цьому

$$\lambda_2(\mathsf{B}) = \int\limits_{\mathsf{A}} f(x)\, d\lambda_1(x)\ .$$

Б16

Г1. Нехай $\lambda(\mathsf{A}) = |\mathsf{A}\cap\mathbb{Z}|$ (кількість цілих точок в A), $\mathsf{A}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu_1 = \big(\lambda_1\times\lambda\big)\times\lambda$, $\quad\mu_2 = \big(\lambda_1\times\lambda\big)\times\lambda_1$. Знайти:

1) $\mu_1([0,1]^3)$; 3) $\mu_1(\mathbb{R}^3)$; 5) $\int_{[0,+\infty)^3} 2^{-x-y-z}\,d\mu_1(x,y,z)$;

2) $\mu_2([0,1]^3)$; 4) $\mu_2(\mathbb{R}^3)$; 6) $\int_{[0,+\infty)^3} 2^{-x-y-z}\,d\mu_2(x,y,z)$.

Г2. Нехай $(\mathsf{X}_1,\mathcal{F}_1)$ та $(\mathsf{X}_2,\mathcal{F}_2)$ – вимірні простори. Довести, що для будь-якої множини $\mathsf{A}\subset(\mathsf{X}_1\times\mathsf{X}_2)$, $\mathsf{A}\in\sigma a\big(\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\big)$ знайдуться $\mathsf{A}_1\in\mathcal{F}_1,\ \mathsf{A}_2\in\mathcal{F}_2$ такі, що $\mathsf{A}\subset(\mathsf{A}_1\times\mathsf{A}_2)$.

І1. Знайти $\lambda_3(\mathsf{A})$, якщо:

1) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,+\infty)^3 \mid (x+y)\in\mathbb{Q}\}$;
2) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,1]^2\times[0,+\infty) \mid (x+y)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$.
3) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,1]^2\times[0,+\infty) \mid (x+y)\in\mathbb{Q}\}$.
4) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,1]^2 \mid \{x\}\in\mathbb{Q}\}$.
5) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,+\infty)^3 \mid \{x+y+z\}\in\mathbb{Q}\}$.
6) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,1]^3 \mid xyz\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\}$.
7) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,+\infty)^3 \mid xyz\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\}$.
8) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,+\infty)^3 \mid (\{x\}+\sin\pi y)\in\mathbb{Q}\}$.
9) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,1]^3 \mid (\{x\}+\{y\}+\{z\})\in\mathbb{Q}\}$.
10) $\mathsf{A} = \{(x,y,z)\in[0,1]\times[0,2]\times(0,3) \mid (x-y)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$.

І2. Чи буде $f\in\mathsf{L}\big(\mathbb{R}^2,\lambda_2\big)$, якщо:

1) $f(x,y) = (x+y)\sin x\sin y\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x+y)$;
2) $f(x,y) = (x+y)\cos x\cos y\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+y)$;
3) $f(x,y) = (xy)\sin x\sin y\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x+y)$;
4) $f(x,y) = x\cos x\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(y)$;
5) $f(x,y) = (x+y)\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(\{xy\})$;
6) $f(x,y) = (\{x\}+\{y\})e^{x+y}\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(\{x\}\{y\})$;
7) $f(x,y) = (x+y)\sin x\sin y\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(x+y)$;
8) $f(x,y) = \{x+y\}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\{x+y\})$;
9) $f(x,y) = e^{x+y}\sin x\sin y\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(e^{x+y})$;
10) $f(x,y) = e^{x+y}\,\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}(e^{x})$?

І3. Для заданих функцій $f:\mathsf{A}\times\mathsf{A}\to\mathbb{R}$ перевірити, що існують повторні інтеграли (можливо, нескінченні)

$$\int_{\mathsf{A}} d\lambda_1(x)\int_{\mathsf{A}} f(x,y)d\lambda_1(y) \quad \text{i} \quad \int_{\mathsf{A}} d\lambda_1(y)\int_{\mathsf{A}} f(x,y)d\lambda_1(x).$$

Чи буде $f\in\mathsf{L}(\mathsf{A}\times\mathsf{A},\lambda_2)$, якщо:

1) $f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+y), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $\quad\mathsf{A}=[0,1]$;

2) $f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $\quad\mathsf{A}=[-1,1]$;

3) $f(x,y) = \begin{cases}y^{-2}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x), & 0<x<y<1,\\ -x^{-2}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(y), & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{в інших випадках},\end{cases}$ $\quad\mathsf{A}=[0,1]$;

4) $f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $\quad\mathsf{A}=[0,1]$;

5) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\quad\mathsf{A}=[1,+\infty)$;

6) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\quad\mathsf{A}=[1,+\infty)$;

7) $f(x,y) = \begin{cases}1, & x,y>0,\ 0\le x-y\le 1,\\ -1, & x,y>0,\ 0\le y-x\le 1,\\ 0, & \text{в інших випадках},\end{cases}$ $\quad\mathsf{A}=\mathbb{R}$;

8) $f(x,y) = e^{-xy}\cos x\cos y$, $\quad\mathsf{A}=[0,+\infty)$;

9) $f(x,y) = e^{-xy}\sin^2 x\sin^2 y$, $\quad\mathsf{A}=[0,+\infty)$;

10) $f(x,y) = \begin{cases}2^{2n}, & 2^{-n}\le x,y\le 2^{1-n},\ n\in\mathbb{N},\\ -2^{n+1}, & 2^{-n-1}\le x,y\le 2^{-n},\ n\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{в інших випадках},\end{cases}$ $\quad\mathsf{A}=[0,1]$;

ЗАНЯТТЯ 17
ПРОСТОРИ L_p

Контрольні запитання

1. *Нерівності Гельдера і Мінковського.*
2. *Означення просторів* $\mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda),\ 1 \le p < +\infty$.
3. *Означення збіжності в просторі* $\mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$.
4. *Щільні підмножини* $\mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$.

А17

В задачах розділу 17 $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою, λ_d – міра Лебега в $\mathbb{R}^d$, $\|f\|_p = \Big(\int\limits_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{1/p}$.

1. Нехай $p \ge 1$, $f(t) = t^{-\alpha}$, $t > 0$.

1) Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ буде $f \in \mathsf{L}_p([0, 1], \lambda_1)$?
2) Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ буде $f \in \mathsf{L}_p([1, +\infty), \lambda_1)$?

2. Нехай $\{f_n : n \ge 0\} \subset \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$, $f_n \to f$ в $\mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$, $f_n \to g \pmod{\lambda}$, $f_n \xrightarrow{\lambda} h$. Довести, що $f = g = h \pmod{\lambda}$ на X.

3. Нехай $f_n(x) = \Big(\sqrt{|x|} + 1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{-1}$, $f(x) = (\sqrt{|x|} + 1)^{-1}$.

1) При яких $p \ge 1$ буде $f_n \to f$ в $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$?
2) Нехай $\lambda_1(\mathsf{A}) < +\infty$. При яких $p \ge 1$ буде $f_n \mathrm{I}_{\mathsf{A}} \to f \mathrm{I}_{\mathsf{A}}$ в $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$?

4. Нехай $f_n(x) = \sqrt{n}\, \mathrm{I}_{[0, \frac{1}{n})}(x)$. Довести, що

1) $f_n \to 0$ в $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}, \lambda_1)$; 2) $f_n \not\to 0$ в $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}, \lambda_1)$.

5. З'ясувати, чи збігається в $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$ послідовність функцій f_n, $n \ge 1$, якщо:

1) $f_n(x) = (x^n - x^{2n})\mathrm{I}_{[0,1](x)}$; 2) $f_n(x) = (1 - nx)\mathrm{I}_{[0, \frac{1}{n}](x)}$; 3) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}\, \mathrm{I}_{[n, +\infty)}(x)$?

6. Нехай $\mu(\mathsf{A}) = \lambda_1(\mathsf{A}) + \mathrm{I}_{\mathsf{A}}(0)$, $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ і $f_n(x) = \sqrt{n}\, \mathrm{I}_{[0,\ \frac{1}{n}]}(x)$. Дослідити на збіжність послідовність $\{f_n : n \ge 1\}$ у просторах $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}, \lambda_1)$ і $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}, \mu)$.

Д1. Навести приклад послідовності функцій $\{f_n : n \ge 1\} \subset \mathsf{L}_1([0, 1], \lambda_1)$, яка збігається у просторі $\mathsf{L}_1([0, 1], \lambda_1)$, але не збігається в жодній точці відрізка $[0, 1]$.

Д2. Нехай додатні числа p, q і r такі, що

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad f \in \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda), \quad g \in \mathsf{L}_q(\mathsf{X}, \lambda), \quad h \in \mathsf{L}_r(\mathsf{X}, \lambda).$$

Довести, що $fgh \in \mathsf{L}_1(\mathsf{X}, \lambda)$ і $\|fgh\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$.

Д3. Нехай $1 \le p \le s \le q$, $p < q$. Довести, що

$$\big(\mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda) \cap \mathsf{L}_q(\mathsf{X}, \lambda)\big) \subset \mathsf{L}_s(\mathsf{X}, \lambda)$$

і для довільної функції $f \in \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda) \cap \mathsf{L}_q(\mathsf{X}, \lambda)$ виконується нерівність

$$\|f\|_s \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{\beta}, \quad \text{де } \alpha = \frac{s^{-1} - q^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}},\ \beta = \frac{p^{-1} - s^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}.$$

Д4. Нехай $f \in \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$, $1 < p < \infty$. Довести, що

$$\|f\|_p = \sup\Big\{\int\limits_{\mathsf{X}} fg \, d\lambda \,|\, g \in \mathsf{L}_q(\mathsf{X}, \lambda),\ \|g\|_q \le 1\Big\},$$

де число q таке, що $1/p + 1/q = 1$.

Д5. Нехай $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$, $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-вимірна. Введемо позначення

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} : |f| \le c \pmod{\lambda}\},\ \mathsf{L}_\infty(\mathsf{X}, \lambda) := \{f : \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

Довести, що

1) $\mathsf{L}_\infty(\mathsf{X}, \lambda) \subset \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ при всіх $p \ge 1$; 2) $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$ при всіх $f \in \mathsf{L}_\infty(\mathsf{X}, \lambda)$.

Д6. Нехай $f \in \mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$. Довести, що $\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x + t) - f(x)|^p \, d\lambda_1(x) \to 0, \quad t \to 0.$

Б17

Г1. Нехай $\{g, f_n : n \ge 1\} \subset \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ і виконуються умови:

1) $\forall n \ge 1 : |f_n| \le g \pmod{\lambda}$; 2) $f_n \to f \pmod{\lambda}$.

Довести, що $f \in \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ і $f_n \to f$ в $\mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$.

Г2. Нехай $1 \le p < q < +\infty$, $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda_1(\mathsf{A}) < +\infty$. Довести, що

1) $\mathsf{L}_q(\mathsf{A}, \lambda_1) \subset \mathsf{L}_p(\mathsf{A}, \lambda_1)$;

2) жодний з просторів $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$ і $\mathsf{L}_q(\mathbb{R}, \lambda_1)$ не міститься в іншому.

І1. Для яких $p \ge 1$ справедливо, що $f \in \mathsf{L}_p((0,1), \lambda_1)$, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}, \\ \sin x, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, x \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}, \\ \cos x, \ x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$;

4) $f(x) = \dfrac{e^x \ln x}{x^2(1-x)^4}$;

5) $f(x) = \dfrac{\mathrm{I}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(x)}{\sqrt{x}(1-x)}$;

6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^4(1-x)^5}$?

Нехай $\mathsf{A} = \big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\big\}$. З'ясувати, для яких $p \ge 1$ справедливо, що $f \in \mathsf{L}_p(\mathsf{A}, \lambda_2)$, якщо:

7) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-1}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

8) $f(x,y) = \begin{cases} (|x|+|y|)^{-1}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

9) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+xy+y^2)^{-1}, & x^2+y^2 \ne 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

10) $f(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{-1}, & x \ne y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$

І2. З'ясувати, для яких значень $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $p \ge 1$ справедливо, що $f \in \mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$, якщо для $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x) = \dfrac{|x|^\alpha}{(1+x^2)^\beta}$;

2) $f(x) = \dfrac{\ln(1+|x|^\alpha)}{(1+x^4)^\beta}$;

3) $f(x) = |1-x|^\alpha |1+x|^\beta$;

4) $f(x) = \dfrac{|1-x|^\beta}{|x|^\alpha(1+x^4)} \ln(1+|x|)$;

5) $f(x) = \dfrac{|\operatorname{arctg} x|^\beta}{(1+x^2)^\alpha}$;

6) $f(x) = \dfrac{|1+x|^\alpha - 1}{(1+x^2)|x|^\beta}$.

Визначити ті значення $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $p \ge 1$, для яких $f \in \mathsf{L}_p(\mathbb{R}^2, \lambda_2)$, якщо для $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

7) $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-\alpha}$;

8) $f(x,y) = (1+|x|^\alpha + |y|^\beta)^{-1}$;

9) $f(x,y) = ((1+|x|^\alpha)(1+|y|^\beta))^{-1}$;

10) $f(x,y) = \begin{cases} |1-x^2-y^2|^{-\alpha}, & x^2+y^2 \ne 1, \\ 0, & x^2+y^2 = 1. \end{cases}$

І3. З'ясувати, для яких значень $p \ge 1$ послідовність функцій $\{f_n : n \ge 1\}$ збігається в $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$, якщо для $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$:

1) $f_n(x) = \sqrt{n}\, \mathrm{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;

2) $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$;

3) $f_n(x) = \sqrt{n}\, \mathrm{I}_{[0,\frac{1}{n^2})}(x)$;

4) $f_n(x) = n^2 e^{-\frac{x^2}{n^2}}$;

5) $f_n(x) = n^{-2} e^{-\frac{x}{n}}\, \mathrm{I}_{[0,+\infty)}(x)$;

6) $f_n(x) = \sqrt{|n-n^2x|}\, \mathrm{I}_{[0,\frac{1}{n})}(x)$;

7) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^4+1}\, \mathrm{I}_{[n,+\infty)}(x)$;

8) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}+1}\, \mathrm{I}_{[n,2n]}(x)$;

9) $f_n(x) = \dfrac{1}{|x|+1}\, \mathrm{I}_{[n,n^3+n]}(x)$;

10) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}+1}\, \mathrm{I}_{[-n^2,n^2]}(x)$.

ЗАНЯТТЯ 18
КОНТРОЛЬНА РОБОТА 2

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Чи буде борельовою функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така, що $f(x,y) = \cos[x]$?

2. Нехай $f_n(x) = |x|^{1/n}/n$.
1) Чи збігається послідовність f_n м.с. $(\mathrm{mod}\,\lambda_1)$ на $\mathbb{R}$?
2) Чи збігається послідовність f_n за мірою λ_1 на $\mathbb{R}$?

3. Розглянемо функції

$$F(x) = -\mathrm{I}_{(-\infty,0)}(x) + x^2\mathrm{I}_{[0,2)}(x) + [2x]\mathrm{I}_{[2,+\infty)}(x),\ f(x) = [x],\ x \in \mathbb{R}.$$

1) Довести, що функція f є $\big(\mathcal{S}_F, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-вимірною.
2) Знайти $\int_{(-\infty,3]} f(x)\,d\lambda_F(x)$.
3) Чи буде f інтегровною за мірою λ_F на $(-\infty,\ 3]$?

4. Знайти

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\pi]} \Big(\frac{2-2\cos x}{x^2}\Big)^n \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\lambda_1(x).$$

5. Нехай $\Big(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda\Big)$ – вимірний простір з мірою. Для $\mathcal{F}$-вимірних функцій $f,\ g:\ \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ покладемо

$$\rho(f,g) = \min\Big\{1,\ \int_{\mathsf{X}} \sqrt{\big|f(x)-g(x)\big|}\,d\lambda(x)\Big\}.$$

Чи вірно, що для будь-якого $\big(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda\big)$ буде $\rho(f_n, f) \to 0,\ n \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли $f_n \xrightarrow{\lambda} f,\ n \to \infty$?

ВІДПОВІДІ ДО ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Заняття 1

І1. Кілець немає. Півкільцями є класи в пунктах $1, 2, 6, 7, 9$.

І2. $1)$ $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$; $2)$ $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}\}$; 3) $\{\varnothing, \{1\}\}$ і $\{\varnothing, \{2\}\}$; 4) $\mathcal{H}$ не є σ-алгеброю, бо $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\} \notin \mathcal{H}$; 5) буде півкільцем, але не кільцем, бо $\{1\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{H}$; 6) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\} \notin \mathcal{H}$; 7) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\} \notin \mathcal{H}$; 8) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\sqrt{2}n\} \notin \mathcal{H}$; 9) $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, бо $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\} \notin \mathcal{H}$; 10) $\mathcal{H}$ не є півкільцем.

І3. $1)$ $k(\mathcal{H}) = \sigma k(\mathcal{H}) = \{\varnothing, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{A}\backslash\mathsf{B}, \mathsf{A}\cap\mathsf{B}, \mathsf{B}\backslash\mathsf{A}, \mathsf{A}\triangle\mathsf{B}, \mathsf{A}\cup\mathsf{B}\}$; 2) $a(\mathcal{H}) = \sigma a(\mathcal{H}) = \{\varnothing, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{A}\backslash\mathsf{B}, \mathsf{A}\cap\mathsf{B}, \mathsf{B}\backslash\mathsf{A}, \mathsf{A}\triangle\mathsf{B}, \mathsf{A}\cup\mathsf{B}, \mathsf{X}, \mathsf{X}\backslash\mathsf{A},\ \mathsf{X}\backslash\mathsf{B},\ \mathsf{X}\backslash(\mathsf{A}\backslash\mathsf{B}),\ \mathsf{X}\backslash(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}), \mathsf{X}\backslash(\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}),\ \mathsf{X}\backslash(\mathsf{A}\triangle\mathsf{B}),\ \mathsf{X}\backslash(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})\}$; 3) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$; 4) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{[0,2)\}$; 5) $m(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{[0,3]\}$; 6) $\sigma a(\mathcal{H}) = 2^{\mathcal{H}}$; 7) кільце утворюють всі скінченні множини натуральних чисел (включаючи порожню); 8) кільце утворюють усі скінченні множини дійсних чисел (включаючи порожню); 9) σ-кільце утворюють усі не більш ніж зліченні множини дійсних чисел (включаючи порожню); 10) алгебру утворюють усі скінченні множини дійсних чисел (включаючи порожню) і їх доповнення до множини дійсних чисел.

І4. 1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \mathsf{A}\cup\mathsf{B}\cup\mathsf{C}$; 2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = [0,1)$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = [0,+\infty)$; 3) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = (0,\pi/2)$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \mathbb{R}$; 4) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \{0\}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \mathbb{R}$; 5) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = (1,4]$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \mathbb{R}$; 6) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \varnothing$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = [0,+\infty)$; 7) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \varnothing$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = (-\infty,0)$; 8) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = [3,4]$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = (e,+\infty)$; 9) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \varnothing$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = [1,+\infty)$; 10) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \varnothing$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n = \mathbb{R}$.

Заняття 2

І1. Відповідь "так" в пунктах 3),7), "ні" в інших пунктах.

І2. 1) $\varphi(\mathsf{A}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 2) $\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 3) $\varphi(\mathsf{A}) + \varphi(\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) - \varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) + \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 4) $\varphi(\mathsf{A}) + \varphi(\mathsf{B}) - 2\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) - \varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) + 2\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 5) $\varphi(\mathsf{A}) + \varphi(\mathsf{B}) + \varphi(\mathsf{C}) - 2\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) - 2\varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) - 2\varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) + 3\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 6) $\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) + \varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) - 3\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 7) $\varphi(\mathsf{X}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) - \varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) + 2\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 8) $\varphi(\mathsf{X}) - \varphi(\mathsf{A}) - \varphi(\mathsf{B}) - \varphi(\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) + \varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 9) $\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}) + \varphi(\mathsf{B}\cap\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{C}\cap\mathsf{A}) - 2\varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 10) $\varphi(\mathsf{X}) - \varphi(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$.

Заняття 3

І1. 1) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = 3\mathrm{I}_\mathsf{A}(1) + 8\mathrm{I}_\mathsf{A}(2)$; 2) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = 7\mathrm{I}_\mathsf{A}(\pi) + 8\mathrm{I}_\mathsf{A}(2\pi)$; 3) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = 3\mathrm{I}_\mathsf{A}(-1) + 2\mathrm{I}_\mathsf{A}(1)$; 4) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = 2\mathrm{I}_\mathsf{A}(1) + 3\mathrm{I}_\mathsf{A}(3)$; 5) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = \mathrm{I}_\mathsf{A}(5) + 3\mathrm{I}_\mathsf{A}(7)$; 6) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = 15\mathrm{I}_\mathsf{A}(\pi) + 2\mathrm{I}_\mathsf{A}(10)$; 7) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = \sum\limits_{n=1}^{5}\mathrm{I}_\mathsf{A}(n)$; 8) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = \sum\limits_{n=1}^{5}\mathrm{I}_\mathsf{A}(\sqrt{n})$; 9) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = 11\mathrm{I}_\mathsf{A}(0) + 3\mathrm{I}_\mathsf{A}(2) + \sum\limits_{n=2}^{7}\mathrm{I}_\mathsf{A}(\ln n)$; 10) $\lambda_F^*(\mathsf{A}) = \mathrm{I}_\mathsf{A}(e) + \mathrm{I}_\mathsf{A}(e^2) + 3\mathrm{I}_\mathsf{A}(e^3)$.

І2. 3), 7), 8) – не є зовнішньою мірою. 1) $\mathcal{S} = \{\varnothing, \mathsf{X}\}$; 2) $\mathcal{S} = 2^{\mathsf{X}}$; 4) $\mathcal{S} = \{\varnothing, \mathsf{X}\}$; 5) $\mathcal{S} = \{\varnothing, \mathsf{X}, \{3\}, \{1,2\}\}$; 6) $\mathcal{S} = \{\varnothing, \mathsf{X}, \{2\}, \{1,3\}\}$; 9) $\mathcal{S} = 2^{\mathsf{X}}$; 10) $\mathcal{S} = 2^{\mathsf{X}}$.

Заняття 4

І1. 1) $\lambda_1(\mathsf{A}) = +\infty$; 2) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 1$; 3) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 4$; 4) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$; 5) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$; 6) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 10$; 7) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 2\pi$; 8) $\lambda_1(\mathsf{A}) = +\infty$; 9) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 3$; 10) $\lambda_1(\mathsf{A}) = \ln 2/\pi$.

І2. 1) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 2$; 2) $\lambda_1(\mathsf{A}) = e/(e-1)$; 3) $\lambda_1(\mathsf{A}) = \pi/4$; 4) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 1$; 5) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 1/2$; 6) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 1/\ln 2$; 7) $\lambda_1(\mathsf{A}) = +\infty$; 8) $\lambda_1(\mathsf{A}) = \pi/3^5$; 9) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$; 10) $\lambda_1(\mathsf{A}) = 1/2$.

Заняття 5

І1. $1), 2), 4), 10)$ $\lambda_2(\mathsf{A}) = 0$; $3),\ 5),\ 9)$ $\lambda_2(\mathsf{A}) = +\infty$; $6),\ 7)$ $\lambda_2(\mathsf{A}) = 4$; $8)$ $\lambda_2(\mathsf{A}) = 3$.

І2. Значення $\lambda_2(\mathsf{A})$: $1)\ 8;\ 2)\ 4;\ 3)\ \ln 2;\ 4)\ 1;\ 5)\ e^{-2};\ 6)\ 1;\ 7)\ \pi/3;\ 8)\ \pi/3;\ 9)\ 2;\ 10)\ 5$.

І3. Значення $\lambda_2(\mathsf{A})$: $1)\ 1;\ 2)\ +\infty;\ 3)\ 1/e;\ 4)\ 2;\ 5)\ \sqrt{\pi};\ 6)\ 6;\ 7)\ \pi/4;\ 8)\ \ln\big((2+2\sqrt{2})/(2+\sqrt{5})\big);\ 9)\ \pi/4;\ 10)\ 2$.

Заняття 6

І1. $1)\ 2n+1;\ 2)\ 2n-1;\ 3)\ 2n;\ 4)\ 0;\ 5)\ 7;\ 6)\ n^2-n;\ 7)\ 5;\ 8)\ 6;\ 9)\ 9;\ 10)\ 32$.

І2. Значення $\lambda_F(\mathsf{A})$: $1),\ 6)\ e;\ 2)\ e^2;\ 3)\ e+e^2+e^3;\ 4)\ e+e^2;\ 5),\ 7)\ e^2-e;\ 8)\ e+e^2+\cdots+e^9;\ 9)\ e+e^4+e^9;$ $10) e+e^2+e^4+e^8$.

I3. 1) $|\mathsf{A}\cap\{0\}|$; 2) $4|\mathsf{A}\cap\{1\}|$; 3) $15|\mathsf{A}\cap\{-5\}|$; 4) $10|\mathsf{A}\cap\{-7\}|$; 5) $2|\mathsf{A}\cap\{0\}|+|\mathsf{A}\cap\{1\}|$; 6) $10|\mathsf{A}\cap\{-2\pi\}|+5|\mathsf{A}\cap\{\pi\}|$; 7) $8|\mathsf{A}\cap\{-10\}|+11|\mathsf{A}\cap\{10\}|$; 8) $(1+\sqrt{2})\cdot|\mathsf{A}\cap\{e\}|+2|\mathsf{A}\cap\{\pi\}|$; 9) $\left|\mathsf{A}\cap\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\{\sqrt[3]{n}\}\Big)\right|$; 10) $|\mathsf{A}\cap\{-\operatorname{tg}1,0,\operatorname{tg}1\}|$.

Заняття 9

I1. 1), 2) $g(x)=0$; 3) $g(x)=\pi$; 4) $g(x)=\ln(1+|x|)$; 5) $g(x)=\arcsin 2^{-|x|}$; 6) $g(x)=(\operatorname{ch}x)^{\operatorname{sh}x}$; 7) $g(x,y)=x^2$; 8) $g(x,y)=\cos x$; 9) $g(x,y)=xy$; 10) $g(x,y)=\operatorname{ch}x$.

I2. $1)-4), 6)-9)$ $g(x)=0$; $5), 10)$ $g(x)=1$.

I3. 1) $\mathsf{A}_\varepsilon=[\frac{\varepsilon}{2},\pi-\frac{\varepsilon}{2}]$; 2) $\mathsf{A}_\varepsilon=[0,\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}]\cup[\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\pi]$; 3) $\mathsf{A}_\varepsilon=[0,1-\varepsilon]$; 4) $\mathsf{A}_\varepsilon=[\frac{\varepsilon}{2},1-\frac{\varepsilon}{2}]$; 5) $\mathsf{A}_\varepsilon=[0,\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}]\cup[\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\pi]$; 6) $\mathsf{A}_\varepsilon=(0,1-\varepsilon]$; 7) $\mathsf{A}_\varepsilon=(0,1-\varepsilon]$; 8) $\mathsf{A}_\varepsilon=[\varepsilon,1]$; 9) $\mathsf{A}_\varepsilon=[0,2-\varepsilon]$; 10) $\mathsf{A}_\varepsilon=[0,1-\varepsilon]$.

Заняття 10

I1. Границею є функція: 1), 3) − 7), 9), 10) $f(x)=0$; 2) $f(x)=2$; 8) $f(x)=\cos x$.

I2. 1) − 3), 9), 10) $g(x,y)=0$; 4), 8) $g(x,y)=\mathrm{I}_{[0,100]}(x^2+y^2)$; 5) $g(x,y)=\max(|x|,|y|)\,\mathrm{I}_{[0,100]}(x^2+y^2)$; 6) $g(x,y)=(|x|+|y|)\,\mathrm{I}_{[0,100]}(x^2+y^2)$; 7) такої g не існує.

Заняття 11

I1. 1) $\lambda(\mathsf{A})+\lambda(\mathsf{B})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$; 2) $\lambda(\mathsf{A})+2\lambda(\mathsf{B})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$; 3) $3\lambda(\mathsf{A})+\lambda(\mathsf{B})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$; 4) $2\lambda(\mathsf{A})+3\lambda(\mathsf{B})-4\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$; 5) $\lambda(\mathsf{A})+\lambda(\mathsf{B})+\lambda(\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{B}\cap\mathsf{C})+2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 6) $\lambda(\mathsf{A})$; 7) $\lambda(\mathsf{A})+2\lambda(\mathsf{B})+\lambda(\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{B}\cap\mathsf{C})+2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 8) $2\lambda(\mathsf{A})+3\lambda(\mathsf{B})+\lambda(\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{B}\cap\mathsf{C})+2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 9) $\lambda(\mathsf{A})+2\lambda(\mathsf{B})+\lambda(\mathsf{C})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})-2\lambda(\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$; 10) $\lambda(\mathsf{A})+\lambda(\mathsf{B})-2\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C})$.

I2. Позначимо: $I_1:=\int\limits_{\mathsf{A}}f_+\,d\lambda_1$; $I_2:=\int\limits_{\mathsf{A}}f_-\,d\lambda_1$; $I_3:=\int\limits_{\mathsf{A}}|f|\,d\lambda_1$; $I_4:=\int\limits_{\mathsf{A}}f\,d\lambda_1$. Тоді: 1) $I_1=I_2=4, I_3=8,\ I_4=0$; 2) $I_1=6,\ I_2=10,\ I_3=16,\ I_4=-4$; 3) $I_1=6,\ I_2=10,\ I_3=16,\ I_4=-4$; 4) $I_1=I_2=3,\ I_3=6,\ I_4=0$; 5) $I_1=I_2=\frac{15}{2},\ I_3=15,\ I_4=0$; 6) $I_1=5-\sqrt{2}-\sqrt{3},\ I_2=7-\sqrt{2}-\sqrt{3},\ I_3=12-2\sqrt{2}-2\sqrt{3},\ I_4=-2$; 7) $I_1=I_2=3,\ I_3=6,\ I_4=0$; 8) $I_1=9-\operatorname{tg}1,\ I_2=18-\operatorname{tg}1,\ I_3=27-2\operatorname{tg}1,\ I_4=-9$; 9) $I_1=\frac{5\pi}{3}-3,\ I_2=0,\ I_3=\frac{5\pi}{3}-3,\ I_4=\frac{5\pi}{3}-3$; 10) $I_1=1-\sin 1,\ I_2=2-\sin 1,\ I_3=3-\sin 1,\ I_4=-1$.

I3. 1) $3\sin 1$; 2) $\frac{\sin 2}{2}$; 3) -1; 4) $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}1+1)$; 5) $\frac{\pi}{4}(e-1)$; 6) $e(e-1)\ln 2$; 7) 10; 8) $\frac{2}{9}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $-2(e-1)$.

I4. 1) $\frac{2}{5}\sin 1$; 2) $1+2\sin 1$; 3) $(e-1)\operatorname{arctg}3$; 4) $2(e-1)\operatorname{sh}1$; 5) 3; 6) $\frac{6}{5}$; 7) $(e-1)\operatorname{sh}1$; 8) $(e-1)(e^2-1)\ln 2$; 9), 10) $+\infty$.

I5. 1) $2^{101}-2$; 2) $\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{201}{2})$; 3) $\frac{3^{10}-1}{\sqrt{3}-1}\sqrt{3}$; 4) 210; 5) 5050; 6) 338350; 7) 50005000; 8) $\frac{1}{6}(10^4\cdot(10^4+1)\times(2\cdot 10^4+1))$; 9) $\frac{e^{10000}-1}{e-1}e$; 10) 666700.

Заняття 12

I2. 1) 2; 2) $e-1$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{e^3}{e-1}$; 5) $\frac{11}{54}$; 6) $\frac{e-2}{2}$; 7) 4; 8) e^2; 9) $e-\frac{3}{2}$; 10) $e-\frac{1}{2}$.

I3. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\ln\cos 1$; 4) $\frac{1}{2}-\frac{\sin 2}{4}$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{\sin 2}{4}$; 6) $\frac{3}{8}-\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 4}{32}$; 7) $\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sh}2}{4}$; 8) $\frac{\operatorname{sh}2}{4}-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{\pi}{4}$; 10) $\ln(1+\sqrt{2})$.

I4. Невласний інтеграл збіжний і функція інтегровна за Лебегом відповідно при: 1) $\alpha>0,\ \alpha>1$; 2) $\alpha>-1,\ \alpha>1$; 3) $\alpha>-5,\ \alpha>1$; 4) $|\alpha|>1,\ \alpha<-1$. В пунктах 5)-10) невласний інтеграл збіжний, функція неінтегровна за Лебегом.

I5. 1) 3; 2) e; 3) $\frac{\pi^2}{6}$; 4), 5) 0; 6) $\frac{e^{10}-e}{e-1}$; 7) 2; 8) $\frac{3}{2}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $\frac{1}{3}$.

I6. 1) 0; 2) $10+\frac{\sin 20}{2}$; 3) $9e^{10}+56$; 4) $\frac{1}{2}\ln 2+2$; 5) $-5e^{-1}+2$; 6) $2\ln 2-1$; 7) $9\operatorname{sh}1-6\operatorname{ch}1$; 8) $754e^{10}+391$; 9) $\frac{1}{4}\ln 82+\sum\limits_{n=1}^{9}\sqrt{n^3}$; 10) $\frac{\pi^2}{2}-4$.

Заняття 13

I1. 1) 0; 2) 1; 3), 4) 0; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) 1; 8) π; 9) 0; 10) $\frac{1}{5}$.

I2. Буде правильною лище в 9) при $\alpha>1$ і в 10) при $\alpha<1$.

I3. В усіх пунктах отримаємо границю, підставивши в інтеграл $f(x)$ замість $f_n(x)$ і $g(x)$ замість $g_n(x)$.

I4. 1) 1; 2) 4; 3) 7; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 9; 6) 100; 7) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 8) 2; 9) $+\infty$; 10) 0.

Заняття 14

І1. 1) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 3) π; 4) $\frac{\ln 4}{3}$; 5) -1; 6) π; 7), 8) $\frac{\pi}{2}$; 9) $-\frac{\pi}{2}$; 10) 2π.

І3. В усіх пунктах, щоб отримати похідну, досить продиференціювати підінтегральний вираз по t.

Заняття 15

І1. 1) $\mathsf{X}_+ = \bigcup\limits_{n=1}^{5}[(2n-2)\pi,(2n-1)\pi]$, $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} \sin x\, d\lambda_1(x)$; 2) $\mathsf{X}_+ = \varnothing$; $\mu_+(\mathsf{A}) = 0$; 3) $\mathsf{X}_+ = \mathbb{R}\setminus(\ln(2/3),\ln(3/2))$; $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} (2-3e^{-|x|})\, d\lambda_1(x)$; 4) $\mathsf{X}_+ = [5,15]$; $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{[5,10]\cap\mathsf{A}} (x^2-25)\, d\lambda_1(x) + \int\limits_{[10,15]\cap\mathsf{A}} (15-x)\, d\lambda_1(x)$; 5) $\mathsf{X}_+ = \mathsf{X}$; $\mu_+(\mathsf{A}) = \mu(\mathsf{A})$; 6) $\mathsf{X}_+ = (-\infty, 2-\log_2 6]$; $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} ((\frac{1}{2})^{x-2} - 6)\, d\lambda_1(x)$; 7) $\mathsf{X}_+ = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \in [0,\frac{\pi}{2}]\cup\bigcup\limits_{n=1}^{4}[\frac{(4n-1)\pi}{2},\frac{(4n+1)\pi}{2}]\}$, $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} \cos(x^2+y^2)\, d\lambda_2(x,y)$; 8) $\mathsf{X}_+ = \{(x,y)\,|\,\ln 5 \le x^2+y^2 \le 9\}$, $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} (e^{x^2+y^2}-5)\, d\lambda_2(x,y)$; 9) $\mathsf{X}_+ = \{(x,y)\,|\,(x+1)^2+(y-2)^2 \ge 4\}$, $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} ((x+1)^2+(y-2)^2-4)\, d\lambda_2(x,y)$; 10) $\mathsf{X}_+ = \{(x,y)\,|\,(x+y)^2+(y+3)^2 \ge 8\}$, $\mu_+(\mathsf{A}) = \int\limits_{\mathsf{X}_+\cap\mathsf{A}} ((x+y)^2+(y+3)^2-8)\, d\lambda_2(x,y)$, в усіх пунктах $\mathsf{X}_- = \mathsf{X}\setminus\mathsf{X}_+$, $\mu_- = \mu - \mu_+$.

І2. $\lambda_a = \lambda_{F_1}$, $\lambda_s = \lambda_{F_2}$, де $F_2(x) = F(x) - F_1(x)$, 1) $F_1(x) = |x|[x] - \frac{[|x|]([|x|]+1)}{2}\operatorname{sign} x$, $x \notin \mathbb{Z}$, у цілих точках доозначається за неперервністю справа, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = [x]\operatorname{sign} x$; 2) $F_1(x) = x|x|$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 2|x|$; 3) $F_1(x) = 3x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 3$; 4) $F_1(x) = e^x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = e^x$; 5) $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^4}$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = \frac{1}{1+x^4}$; 6) $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = \frac{1}{1+x^2}$; 7) $F_1(x) = x^2\mathrm{I}_{[0,1)}(x) + (3x^4-2)\mathrm{I}_{[1,+\infty)}(x)$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 2x\mathrm{I}[0,1)(x) + 12x^3\mathrm{I}[1,+\infty)(x)$; 8) $F_1(x) = -1 + (2x-3)\mathrm{I}[1,+\infty)(x)$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 2\mathrm{I}[1,+\infty)(x)$; 9) $F_1(x) = x$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = 1$; 10) $F_1(x) = \operatorname{arctg} x\mathrm{I}_{(-\infty,0]}(x)$, $\frac{d\lambda_a}{d\lambda_1} = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{I}_{(-\infty,0]}(x)$.

Заняття 16

І1. 1), 3), 4), 5), 8), 9) 0; 2) $+\infty$, 6) 1; 10) 6.

І2. Маємо $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^2, \lambda_2)$ у випадках 1), 3), 5), 6), 7), 9), 10).

І3. Маємо $f \in \mathsf{L}(\mathsf{A}\times\mathsf{A}, \lambda_2)$ у випадках 1), 2), 3), 8), 10).

Заняття 17

І1. $1) - 7), 9), 10)$ $p \in \varnothing$; 8) $p \in [1,2)$.

І2. 1) $(2\beta-\alpha)p > 1$, $\alpha p > -1$, 2) $4\beta p > 1$; 3) $\alpha p > -1$, $\beta p > -1$, $(\alpha+\beta)p < -1$; 4) $(\alpha-1)p < 1$, $\beta p > -1$, $(4+\alpha-\beta)p > 1$; 5) $2\alpha p > 1$, $\beta p > -1$; 6) $(2+\beta-\alpha)p > 1$, $(\beta-1)p < 1$; 7) $(2\alpha-1)p > 1$; 8) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} < p$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; 9) $\alpha p > 1$, $\beta p > 1$; 10) $p \in \varnothing$.

І3. 1) $p < 2$; 2), 4) $p \in \varnothing$; 3) $p < 4$; 5) $p \ge 1$; 6) $p < 2$; 7) $p \ge 1$; 8) $p > 2$; 9) $p > 1$; 10) $p > 2$.

ВКАЗІВКИ ДО ДОДАТКОВИХ ЗАДАЧ

Заняття 1

Д1. 1) $\mathsf{A}\setminus\mathsf{B} = (\mathsf{A}\cup\mathsf{B})\triangle\mathsf{B}$; 2) $\mathsf{A}\cup\mathsf{B} = (\mathsf{A}\triangle\mathsf{B})\triangle(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$.
Д2. Кільце скінченних множин дійсних чисел.
Д3. Приклад: $\mathsf{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{-1,2\}, \{1\}, \{-1,1,2\}\}$, $f(x) = x^2$.
Д4. $\mathrm{I}_{\mathsf{A}\cup\mathsf{B}} = \mathrm{I}_{\mathsf{A}} + \mathrm{I}_{\mathsf{B}} + \mathrm{I}_{\mathsf{A}}\mathrm{I}_{\mathsf{B}} \pmod 2$, $\mathrm{I}_{\mathsf{A}\setminus\mathsf{B}} = \mathrm{I}_{\mathsf{B}} + \mathrm{I}_{\mathsf{A}}\mathrm{I}_{\mathsf{B}} \pmod 2$.
Д5. 1) Приклад: $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, $\mathcal{P}' = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$. 2) Приклад: $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}\}$, $\mathcal{P}' = \{\varnothing, \{1,2\}\}$.
Д6. Будемо по черзі вибирати з σ-кільця множини $\mathsf{A}_{n+1} \notin k(\{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\})$, $n \ge 1$. Розглядаючи нові породжені кільця, ми отримаємо послідовність множин, що не будуть "ділитися", починаючи з деяких n або

нескінченну послідовність вкладених поділів. В обох випадках отримаємо послідовність попарно неперетинних непорожніх множин, кількість їх об'єднань рівна континууму.

Заняття 2

Д1. Позначити $\lambda(\mathsf{A}\setminus\mathsf{B})=x$, $\lambda(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})=y$, $\lambda(\mathsf{B}\setminus\mathsf{A})=z$, записати нерівність умови через x, y, z.
Д2. Для неперетинних $\mathsf{A}_i\in\mathcal{K}$, $\mathsf{A}=\cup_{i=1}^{\infty}\mathsf{A}_i$, $\mathsf{A}\in\mathcal{K}$ маємо

$$\nu(\mathsf{A})\geq\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A})\geq\sum_{n=1}^{m}\sum_{i=1}^{j}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A}_i)=\sum_{i=1}^{j}\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A}_i)\overset{m\to\infty}{\to}\sum_{i=1}^{j}\nu(\mathsf{A}_i)\overset{j\to\infty}{\to}\sum_{i=1}^{\infty}\nu(\mathsf{A}_i),$$

$$\nu(\mathsf{A})=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A})=\lim_{m\to\infty}\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\sum_{i=1}^{j}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A}_i)=$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{j}\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A}_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mu_n(\mathsf{A}_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(\mathsf{A}_i).$$

Д3. 1) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\mathsf{A}_n)\geq\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\cap_{k\geq n}\mathsf{A}_k)=\mu(\cup_{n\geq1}\cap_{k\geq n}\mathsf{A}_k)$;
2) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\mathsf{A}_n)\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\cup_{k\geq n}\mathsf{A}_k)=\mu(\cap_{n\geq1}\cup_{k\geq n}\mathsf{A}_k)$;   3) $\mathsf{A}_{2k-1}=(0,1]$, $\mathsf{A}_{2k}=(1,2]$, $k\geq1$.
Д4. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ сукупність $\{\mathsf{B}\in\mathcal{H}_0\mid\mu(\mathsf{B}\cap\mathsf{E})\geq1/n\}$ скінченна.
Д5. Спочатку доводимо, що для кожної $\mathsf{A}\in\mathcal{F}$ знайдеться $\mathsf{B}\subset\mathsf{A}$ така, що $\mu(\mathsf{A})/3\leq\mu(\mathsf{B})\leq2\mu(\mathsf{A})/3$. Адже якщо

$$\delta:=\inf\{\mu(\mathsf{B})\mid\mathsf{B}\subset\mathsf{A},\mu(\mathsf{B})\geq\mu(\mathsf{A})/2\}\geq2\mu(\mathsf{A})/3,$$

ми можемо побудувати $\mathsf{A}\supset\mathsf{B}_1\supset\mathsf{B}_2\supset\ldots$ так, що $\mu(\mathsf{B}_n)\downarrow\delta$, і тоді $\cap_{n=1}^{\infty}\mathsf{B}_n$ буде атомом. Користуючись доведеним твердженням, ділимо на дві частини X, потім кожну з отриманих частин і т.д. Для довільного фіксованого $x_0\in\mathsf{X}$ знаходимо ланцюжок $\mathsf{X}\supset\mathsf{B}_1\supset\mathsf{B}_2\supset\cdots\ni x_0$, беремо $\mathsf{C}=\cap_{n=1}^{\infty}\mathsf{B}_n$.

Заняття 3

Д1. Нехай A є λ^*-вимірною. Використовуючи означення вимірності, маємо

$$\lambda^*(\mathsf{B})=\lambda^*(\mathsf{B}\cup\mathsf{A})+\lambda^*(\mathsf{B}\setminus\mathsf{A}),\quad\lambda^*(\mathsf{B}\cup\mathsf{A})=\lambda^*(\mathsf{A})\lambda^*(\mathsf{B}\setminus\mathsf{A}.$$

Віднімаючи ці рівності, отримаємо потрібну.
Д2. $\mu^*(\mathsf{C})=0\Rightarrow\mathsf{C}\in\mathcal{S}$, $\sigma a(\mathcal{A})\subset\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ – σ-алгебра, і тоді $\mathsf{A}=\mathsf{B}\cup\mathsf{C}\in\mathcal{S}$. З іншого боку, $\mathsf{A}\in\mathcal{S}\Rightarrow(\mathsf{X}\setminus\mathsf{A})\in\mathcal{S}$, використовуючи перетин зліченних покриттів елементами $\mathcal{A}$, побудуємо $\mathsf{D}\supset(\mathsf{X}\setminus\mathsf{A})$, $\mathsf{D}\in\sigma a(\mathcal{A})$, $\mu(\mathsf{D})=\mu^*(\mathsf{X}\setminus\mathsf{A})$. Беремо $\mathsf{B}=\mathsf{X}\setminus\mathsf{D}$, $\mathsf{C}=\mathsf{A}\setminus\mathsf{B}=\mathsf{D}\setminus(\mathsf{X}\setminus\mathsf{A})$. З адитивності μ^* на вимірних множинах маємо, що $\mu^*(\mathsf{C})=0$.
Д3. Беремо B_n C_n такі, що $\overline{\mu}(\mathsf{C}\setminus\mathsf{B})<1/n$, $\mathsf{B}:=\cup_{n\geq1}\mathsf{B}_n$, $\mathsf{C}:=\cap_{n\geq1}\mathsf{C}_n$. Тоді $\mu^*(\mathsf{A}\setminus\mathsf{B})\leq\mu^*(\mathsf{C}\setminus\mathsf{B})=0\Rightarrow(\mathsf{A}\setminus\mathsf{B})\in\mathcal{S}$; $\mathsf{B}\in\mathcal{S}\Rightarrow\mathsf{A}\in\mathcal{S}$.
Д4. Розглянемо продовження за Каратеодорі міри λ з півкільця $\mathcal{F}$ на відповідну σ-алгебру $\mathcal{S}$. Оскільки продовження є повною мірою і $\mathcal{F}\subset\mathcal{S}$, буде $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{S}$. Для доведення включення в інший бік стандартними міркуваннями зводимо дане твердження до випадку скінченної λ. За твердженням задачі Д2, множина з $\mathcal{S}$ має вигляд $\mathsf{A}\cup\mathsf{B}$, де $\mathsf{A}\in\mathcal{F}$ і $\lambda^*(\mathsf{B})=0$. Використовуючи означення зовнішньої міри, породженої λ, легко побудувати $\mathsf{C}\supset\mathsf{B}$, $\mathsf{C}\in\mathcal{F}$, $\lambda(\mathsf{C})=0$.
Д5. Стандартними міркуваннями зводимо дане твердження до випадку скінченних мір μ_1 і μ_2. Клас множин, що задовольняють нерівність $\mu_1(\mathsf{A})\leq\mu_2(\mathsf{A})$ є монотонним класом, що містить кільце $\mathcal{K}$.
Д6. Перше продовження – λ_2, друге – половина одновимірної міри Лебега перетину з межею $[0,1]^2$, третє – одновимірна міра Лебега перетину з лівою та нижньою сторонами квадрату $[0,1]^2$.
Д7. Якщо $\mathsf{A}\in\mathcal{S}$, то існування вказаної B випливає з однієї з теорем курсу. З іншого боку, якщо вказані B існують, то

$$\forall\,n\geq1\,\exists\,\mathsf{B}_n\in\mathcal{A}:\mu^*(\mathsf{A}\triangle\mathsf{B}_n)<2^{-n},\quad\mathsf{D}:=\cap_{n\geq1}\cup_{k\geq n}\mathsf{B}_k.$$

$$\mu^*(\mathsf{A}\setminus\mathsf{D})=\mu^*(\mathsf{D}\setminus\mathsf{A})=0\Rightarrow\ (\mathsf{A}\setminus\mathsf{D}),(\mathsf{D}\setminus\mathsf{A})\in\mathcal{S},$$

тому $\mathsf{A}=\mathsf{D}\cup(\mathsf{A}\setminus\mathsf{D})\setminus(\mathsf{D}\setminus\mathsf{A})\in\mathcal{S}$.

Заняття 4

Д1. Розглянемо послідовність всіх раціональних точок $r_n\in[0,1]$, $n\geq1$, для кожного n вилучимо з $[0,1]$ відрізок $\left[r_n-x2^{-n},r_n+x2^{-n}\right]$. Отримана множина $\mathsf{A}(x)$ ніде не щільна, $\lambda_1\big(\mathsf{A}(x)\big)$ є неперервною функцією від x, $\lambda_1\big(\mathsf{A}(1)\big)=0$, $\lambda_1\big(\mathsf{A}(0)\big)=1$.
Д2. Розглянути півінтервали зі зліченного покриття A, сума мір яких наближає $\lambda_1(\mathsf{A})$.

Д3. Припустимо, що наведене твердження невірне. Тоді: 1) A злічення; 2) при зсувах A на раціональні значення $r \in [0,1]$ ми отримаємо неперетинні підмножини [0,2], кожна з яких має міру $\lambda_1(\mathsf{A}) > 0$; 3) Користуючись задачею Д2, візьмемо інтервал U такий, що $\lambda_1(\mathsf{A} \cap \mathsf{U}) \geq (3/4)\lambda_1(\mathsf{U})$. Для $-\lambda_1(\mathsf{U})/2 < x < \lambda_1(\mathsf{U})/2$ множина $(\mathsf{A} \cap \mathsf{U}) \cup \big((\mathsf{A} \cap \mathsf{U}) + x\big)$ міститься в в інтервалі $\mathsf{U} \cup (\mathsf{U} + x)$, довжина якого менша за $(3/2)\lambda_1(\mathsf{U})$. Тому $\mathsf{A} \cap \mathsf{U}$ і $(\mathsf{A} \cap \mathsf{U}) + x$ мають спільну точку, отримали твердження для $\varepsilon = \lambda_1(\mathsf{U})/2$.

Д4. Побудуємо $\mathsf{B} \subset [0,1]$, потім її можна перенести на всі відрізки $[n, n+1]$. Розглянемо по порядку наступні інтервали з центрами в усіх раціональних точках з $(0,1)$:

$$\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right), \ \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3^2}, \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2}\right), \ \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3^3}, \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3^3}\right),$$

$$\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3^4}, \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^4}\right), \ \left(\tfrac{2}{4} - \tfrac{1}{3^5}, \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{3^5}\right), \ \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3^6}, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{3^6}\right), \ \ldots .$$

Перший інтервал відкидаємо з $[0,1]$, другий додаємо до множини, третій відкидаємо, четвертий додаємо, і.т.д. Так отримуємо B. Оскільки сума мір інтервалів скінченна, майже кожна точка з $[0,1]$ бере участь в скінченній кількості операцій. Оскільки довжина кожного інтервалу більша за суму довжин наступних, "вплив" кожного інтервалу не буде повністю "погашений" наступними.

Заняття 5

Д1. 1) Досить довести, що межа обмеженої опуклої множини має нульову міру Лебега. Для опуклої множини можна поділити межу на верхню та нижню частини, які є графіками опуклих вгору та вниз функцій. Відомо, що опуклі на $[a,b]$ функції неперервні на (a,b), а тому їх графіки мають нульову міру λ_2. 2) До відкритого круга додаємо підмножину його межі, не вимірну за Лебегом в одновимірному сенсі.

Д2. Поділимо весь простір на одиничні бруси гіперплощинами $x_k = n$, $1 \leq k \leq d$, $n \in \mathbb{Z}$. Всі отримані частини множини A перенесемо в один брус (це будуть переноси на цілочисельні вектори). Візьмемо точку x, покриту щонайменше двома частинами (така знайдеться, оскільки $\lambda_d(\mathsf{A}) > 1$).

Д3. 1) Можна знайти неперетинні бруси J_1 і J_2, $\lambda_d(\mathsf{J}_i \cap \mathsf{F}) > 0$, потім кожен із них поділити на дві частини з додатними мірами перетину з F, і т.д.Тоді кожній послідовності з номерів 1 та 2 можна співставити послідовність вибору вкладених брусів, чому, в свою чергу, відповідає точка з F (тут використовуємо замкненість F). 2) За властивістю регулярності міри, знайдеться замкнена $\mathsf{F} \subset \mathsf{A}$, $\lambda_d(\mathsf{F}) > 0$. Потім використаємо 1).

Заняття 6

Д1. Для будь-яких k, $n \in \mathbb{N}$ множина $\{x \in (-n,n] \,|\, \lambda_F(\{x\}) > 1/k\}$ скінченна.
Д2. 1) $\mathsf{D} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_F$, 2) Для $(a,b] \subset (0,1]$ буде $\lambda_F((a,b]) \leq 3\lambda_1((a,b])$, а тому $\lambda_F(\mathsf{D}) \leq 3\lambda_1(\mathsf{D}) = 0$.
Д3. Для міри μ на алгебрі $\mathcal{A}$

$$\mathsf{A}\ \mu^* - \text{вимірна} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathsf{B} \in \mathcal{A} : \mu^*(\mathsf{A} \triangle \mathsf{B}) < \varepsilon$$

(див. А3). 1) Використовуємо, що $2\lambda_1^*(\mathsf{C}) \leq \lambda_F^*(\mathsf{C}) \leq 4\lambda_1^*(\mathsf{C})$, $\mathsf{C} \subset [1,2]$. 2) Досить показати співпадіння класів вимірних підмножин множини $[-n,-1/n] \cup [1/n,n]$. При кожному фіксованому n використовуємо, що

$$2\lambda_1^*(\mathsf{C})/n \leq \lambda_F^*(\mathsf{C}) \leq 2n\lambda_1^*(\mathsf{C}).$$

Д4. 1) Одноточкові множини – точки стрибків F (з точністю до еквівалентності атомів). 2) $F \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$. 3) Для нееквівалентних атомів E_1 і E_2 буде $\mu(\mathsf{E}_1 \cap \mathsf{E}_2) = 0$, і тому $\mu(\mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_2) = \mu(\mathsf{E}_1) + \mu(\mathsf{E}_2)$. Оскільки $\mu(\mathsf{X})$ скінченна, для кожного $n \in \mathbb{N}$ може існувати лише скінченна кількість атомів з $\mu(\mathsf{E}) \geq 1/n$. 4) Для кожної $\mathsf{A} \in \mathcal{F}$ знайдеться $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ така, що $\mu(\mathsf{A})/3 \leq \mu(\mathsf{B}) \leq 2\mu(\mathsf{A})/3$. Адже якщо

$$\delta := \inf\{\mu(\mathsf{B}) \mid \mathsf{B} \subset \mathsf{A}, \mu(\mathsf{B}) \geq \mu(\mathsf{A})/2\} \geq 2\mu(\mathsf{A})/3,$$

беремо $\mathsf{A} \supset \mathsf{B}_1 \supset \mathsf{B}_2 \supset \ldots$ так, що $\mu(\mathsf{B}_n) \downarrow \delta$, і тоді $\cap_{n=1}^{\infty} \mathsf{B}_n$ буде атомом. Використовуючи вказану властивість, на першому кроці ділимо на дві частини X, на кожному наступному – всі частини з попереднього кроку. З допомогою зліченних об'єднань і перетинів отриманих частинок, можна отримати множину будь-якої міри з $[0, \mu(\mathsf{X})]$.

Заняття 8

Д1. 1) $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$; 2) Приклад: $(\mathsf{X}, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f(x) = x\mathrm{I}_{\mathsf{A}}(x)$, $\mathsf{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{0\}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Д2. Для $f(x) \leq M$, $M \in \mathbb{N}$ беремо $f_n(x) = \sum_{k=1}^{M2^n} f\big((k-1)2^{-n}\big)\mathrm{I}_{((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]}(x)$.
Д3. 1) Нехай $\mathcal{F}$ складається з усіх зліченних множин та їх доповнень, $\mathcal{F} \neq 2^{\mathsf{X}}$. Якщо $\mathsf{A} \notin \mathcal{F}$, $V = \{f_y(x) = \mathrm{I}_{\{y\}}(x) \,|\, y \in \mathsf{A}\}$, то $f^*(x) = \mathrm{I}_{\mathsf{A}}(x)$ не вимірна. 2) Многочлени з раціональними коефіцієнтами є щільною множиною в $\mathbb{C}([-n,n])$. Для всіх k, n для кожної $f \in V$ візьмемо з цієї множини многочлен $P_i^{k,n}$ такий, що

$$\max_{[-n,n]} |f(x) - P_i^{k,n}(x)| \leq 1/k.$$

Тоді, як легко перевірити,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f_*(x) \geq a\} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k,i\geq 1}\{x \in [-n,n] \mid P_i^{k,n}(x) \geq a - 1/k\}.$$

Д4. Візьмемо функції

$$g_n(y) = \mathrm{I}_{\{f(0)\}}(y) + \textstyle\sum_{k=1}^{2^n} \mathrm{I}_{f(((k-1)2^{-n},k2^{-n}])}(y), \quad n \geq 1.$$

Оскільки f неперервна, множини в індикаторах – це інтервали (відкриті, замкнені або напівзамкнені). Тому g_n борельові, а $g_n(y) \to g(y)$ для кожного y.
Д5. Для $\mathsf{A} \in \mathcal{S}_1$ треба довести, що $f^{-1}(\mathsf{A}) \in \mathcal{S}_1$. Досить розглянути $\mathsf{A} \subset (1/n, +\infty)$. Як відомо, $\mathsf{A} = \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$, $\mathsf{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda_1(\mathsf{C}) = 0$. Маємо

$$f^{-1}(\mathsf{A}) = f^{-1}(\mathsf{B}) \cup f^{-1}(\mathsf{C}), \quad f^{-1}(\mathsf{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Досить показати, що $\lambda_1^*(f^{-1}(\mathsf{C})) = 0$. Зовнішня міра визначається через покриття півінтервалами,

$$a, b \geq 1/n \ \Rightarrow\ \lambda_1^*\big(f^{-1}\big((a,b]\big)\big) = \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq (b-a)\sqrt{n}/2.$$

Тому $\lambda_1^*(f^{-1}(\mathsf{C})) \leq \lambda_1^*(\mathsf{C})\sqrt{n}/2 = 0$.

Заняття 9

Д1. 1) Збіжна, оскільки $\sin x$ неперервний. 2) Не збіжна. Для кожного $x \neq r\pi$, $r \in \mathbb{Q}$, для нескінченної кількості номерів n буде $|\sin(nx)| \geq \sqrt{3}/2$ і для нескінченної кількості номерів n буде $|\sin(nx)| \leq 1/2$. Другий спосіб доведення – показати, що послідовність не є фундаментальною за мірою λ_1 на $[0, 2\pi]$
Д2. Використовуємо теорему Єгорова, вибираємо $\mathsf{A}_k \in \mathcal{F}$, $k \geq 1$, а для них n_k так, що

$$\lambda(\mathsf{A}_k) < 2^{-k}, \quad \sup_{x \in (\mathsf{X}\setminus\mathsf{A}_k)} |f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k}.$$

Покладемо всі $t_{n_k} = 1$, інші $t_n = 0$.
Д3. Використовуючи теорему про неперервність міри зверху маємо, що

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \lim_{n\to\infty} \lambda\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0 \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0\ \lambda\big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \lambda\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}\big) = \lambda(\mathsf{X}) \Leftrightarrow$$

$$\lambda\text{-м. с. } \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n \geq 1\ \forall\, k \geq n : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow f_n \to f \pmod{\lambda}.$$

Д4. Для $\mathsf{A}_n = \{x \in \mathsf{X} \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\mathsf{A}_n) < +\infty$, а тому $\mu\Big(\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}_n\Big) = 0$ (див. А2). Тому для кожного $k \geq 1$ нерівність $|f_n(x) - f(x)| \geq 1/k$ має місце для скінченної кількості номерів n $\pmod{\lambda}$. Відкинувши тут для всіх k виключні множини міри нуль, для кожного залишеного x будемо мати збіжність $f_n(x) \to f(x)$.
Д5. Можна вибрати неперервні f_n так, що $\lambda_1\big(\{x \in [a,b] \mid \ |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-n}\}\big) \leq 2^{-n}$, і тоді $f_n \to f \pmod{\lambda_1}$. Це можна зробити, оскільки f є обмеженою за винятком множин як завгодно малої міри, обмежені функції рівномірно наближаються простими, індикатори множин в простих функціях – індикаторами об'єднань півінтервалів, індикатори півінтервалів – неперервними функціями. Другий спосіб доведення – використати теорему Лузіна.

Заняття 10

Д1. Виділяємо підпослідовність $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$, і тоді для кожного $x \in \mathsf{X}$ крім множини нульової міри $f_n(x)$ є спадною послідовністю, що містить збіжну до нуля підпослідовність, і тому $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$.
Д2. Якщо $f_n(x) \to f(x)$, то для цієї числової послідовності буде $\sup_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)| \to 0$. Отже,

$$f_n \to f \pmod{\lambda} \Rightarrow \sup_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \pmod{\lambda} \Rightarrow \sup_{k\geq n} |f_k - f| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

В інший бік, використовуючи спадання послідовності супремумів, маємо:

$$\exists \{n_i\} :\ \sup_{k\geq n_i} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \pmod{\lambda},\ i \to \infty \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \to 0 \pmod{\lambda},\ n \to \infty.$$

Д3. Використовуємо, що $|g_n - f| \leq |f_n - f| + |h_n - f| \pmod{\lambda}$.
Д4. 1) Вибираємо n_k, $k \geq 1$ так, що

$$\lambda_1\big(\{x \in \mathsf{X} \mid \ |f_n| \geq `1/k\}\big) \leq 2^{-k}, \quad n \geq n_k.$$

Покладемо $c_n = \sqrt{k}$, $n_k \leq n < n_{k+1}$.

2) Будемо мати $f_n \xrightarrow{\lambda_1} 0$, вибираємо c_n як і в 1).
Д5. Для збіжності, заданої метрикою, маємо: якщо будь-яка підпослідовність $\{f_{n_k}\}$ послідовності $\{f_n\}$ має збіжну підпідпослідовність $\{f_{n_{k_i}}\}$, то вся $\{f_n\}$ збіжна. Для "плаваючої сходинки" $\{\mathrm{I}_{[(k-1)/n, k/n]},\ n \geq 1, 1 \leq k \leq n\}$

будь-яка підпослідовність збіжна за мірою, з неї можна виділити збіжну м.с. підпідпослідовність, але вся послідовність не збіжна.

Д6. Для неперервних функцій твердження очевидне. За теоремою Лузіна, існують неперервні функції, що відрізняються від даної f на множинах як завгодно малої міри.

Заняття 11

Д1. 1) Розглянемо функцію $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathrm{I}_{\{k\le|f(x)|<k+1\}}(x)$. Тоді $g(x) \le |f(x)| \le g(x)+1$, сума даного в умові ряду – це $\int\limits_{\mathsf{X}} g\,d\lambda$.

2) Розглядаємо $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathrm{I}_{\{|f(x)|\ge k\}}(x), \quad g(x) \le |f(x)| \le g(x)+1.$

3) Беремо $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k\mathrm{I}_{\{|f(x)|\ge 2^k\}}(x), \quad g(x) \le |f(x)| \le 2g(x)+1.$

Д2. З рівномірної неперервності f та обмеженості A отримуємо, що f обмежена на A і $\lambda_d(\mathsf{A}) < +\infty$.

Д3. Нехай $\mathsf{X} = \cup_{n\ge1}\mathsf{X}_n$, $0 < \lambda(\mathsf{X}_n) < +\infty$, X_n неперетинні,

$$\mathsf{A}_{k,n} = \{x \in \mathsf{X}_n \mid \ k-1 < |f(x)| \le k\}, \quad k \ge 1.$$

Тоді покладемо

$$g(x) = 1/(k2^k\lambda(\mathsf{X}_n)), \quad x \in \mathsf{A}_{k,n}.$$

Д4. 1) За даними кроками K залишиться невизначеною на множині з нульовою мірою Лебега. Довизначимо її за правилом $\mathsf{K}(x) := \sup\{\mathsf{K}(y),\ y \le x\}$. Так отримаємо монотонну (а тому борельову) функцію, еквівалентну даній K. 2) $\int_{[0,1]} \mathsf{K}(x)\,d\lambda_1(x) = 1/2$, оскільки $\mathsf{K}(x) + \mathsf{K}(1-x) = 1 \pmod{\lambda_1}$.

Заняття 12

Д1. В точках з E, що не входять в інтервали довжинами $\alpha/(4n)$ з центрами в $\pi/(2n)+k\pi/(2n)$ буде $|\cos(nx)| \ge \sin(\alpha/8)$, а сума мір цих інтервалів не перевищує $\alpha/2$.

Д2. Множина $[a,b] \setminus \mathsf{A}$ відкрита, є зліченним об'єднанням відкритих інтервалів, тому в кожній її точці I_{A} неперервна. Оскільки $\lambda_1(\mathsf{A}) = 0$, з критерію Лебега отримуємо інтегровність за Ріманом.

Д3. Приклад: $f(q_n) = \dfrac{1}{2^n},\ n \ge 1;\ f(x) = 0,\ x \notin \mathbb{Q}$, де $\{q_n : n \ge 1\} = \mathbb{Q} \cap [a,b]$.

Д4. З умови отримуємо, що $\int_{\mathsf{X}}(f-f^2)^2\,d\lambda = 0 \Rightarrow f - f^2 = 0 \pmod{\lambda}$.

Заняття 13

Д1. Для $h_n \to 0$, $|h_n| \le 1$, розглянемо функції

$$g_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kh_n\mathrm{I}_{\{x\mid\ kh_n\le f(x)<(k+1)h_n\}}(x).$$

Тоді дані в умові ряди для $h = h_n$ – це $\int_{\mathsf{X}} g_n\,d\lambda$. Оскільки $g_n \to f \pmod{\lambda}$, $|g_n| \le |f|+1$, з теореми Лебега отримуємо твердження задачі.

Д2. 1) Позначимо інтеграли з умови через I_n. Якщо $f_n \overset{\lambda}{\not\longrightarrow} f_0$, то знайдуться $0 < \varepsilon_0 < 1$ і $f_{n_k},\ k \ge 1$, такі, що

$$\lambda\big(\{x \in \mathsf{X} : |f_{n_k}(x) - f(x)| \ge \varepsilon_0\}\big) \ge \varepsilon_0.$$

Тоді $I_{n_k} \ge \dfrac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\varepsilon_0$ і $I_n \not\to 0$. Якщо $I_n \not\to 0$, то знайдуться $\delta_0 > 0$ і I_{n_i}, $i \ge 1$, такі, що $\left|I_{n_i}\right| \ge \delta_0$. Виділимо підпідпослідовність $f_{n_{i(j)}} \to f_0 \pmod{\lambda}$, $j \to \infty$. Тоді, з теореми Лебега з мажорантою $g(x) = 1$, маємо

$$\frac{|f_{n_{i(j)}} - f_0|}{1 + |f_{n_{i(j)}} - f_0|} \to 0 \quad \pmod{\lambda},\ j \to \infty,\ \Rightarrow\ I_{n_{i(j)}} \to 0,\ j \to \infty,$$

що суперечить вибору I_{n_i}.

2) Позначимо інтеграли з умови через J_n, нехай $f_n \overset{\lambda}{\not\longrightarrow} f_0$. Тоді для f_{n_k} з 1) буде $J_{n_k} \ge \varepsilon_0^2 \not\to 0$. Твердження в інший бік отримуємо з теореми Лебега з мажорантою $g(x) = 1$.

Д3. $|f| \le g \Rightarrow f \in \mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$. Для деякої підпослідовності n_k буде $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_{\mathsf{X}} f_n\,d\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\mathsf{X}} f_{n_k}\,d\lambda$. З теореми Лебега з мажорантою g маємо:

$$\int\limits_{\mathsf{X}} f\,d\lambda = \int\limits_{\mathsf{X}} \lim_{k\to\infty} \sup_{n\ge n_k} f_n\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathsf{X}} \sup_{n\ge n_k} f_n\,d\lambda \ge \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathsf{X}} f_{n_k}\,d\lambda.$$

Д4. $2\int\limits_{\mathsf{X}} f_0\,d\lambda = \int\limits_{\mathsf{X}} \varliminf_{n\to\infty}(f_0+f_n-|f_n-f_0|)\,d\lambda \le$

$$\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_{\mathsf{X}}(f_0+f_n-|f_n-f_0|)\,d\lambda = 2\int\limits_{\mathsf{X}} f_0\,d\lambda - \varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{\mathsf{X}}|f_n-f_0|\,d\lambda.$$

Д5. 1) Нехай $\{f_n\}$ рівномірно інтегровна. Необхідність записаних тверджень випливає з нерівностей

$$\sup_n\int_{\mathsf{A}}|f_n|\,d\lambda \le \sup_n\Big(\int_{\mathsf{A}\cap\{|f_n|\le c\}}|f_n|\,d\lambda + \int_{\mathsf{A}\cap\{|f_n|>c\}}|f_n|\,d\lambda\Big) \le c\lambda(\mathsf{A}) + \sup_n\int_{\{|f_n|>c\}}|f_n|\,d\lambda.$$

Достатність даних тверджень отримуємо з оцінки

$$\sup_n\lambda(\{|f_n|>c\}) \le \tfrac{1}{c}\sup_n\textstyle\int_{\mathsf{X}}|f_n|\lambda \to 0,\ n\to\infty,$$

та використання другого твердження.

2) Нехай $\{f_n\}$ рівномірно інтегровна. Маємо

$$\int\limits_{\mathsf{X}}|f_n-f|\,d\lambda \le \int\limits_{\{|f_n-f|<\varepsilon\}}|f_n-f|\,d\lambda + \int\limits_{\{|f_n-f|\ge\varepsilon\}}|f_n|\,d\lambda + \int\limits_{\{|f_n-f|\ge\varepsilon\}}|f|\,d\lambda.$$

Перший доданок не перевищує $\varepsilon\lambda(\mathsf{X})$. Для великих n будуть малими другий доданок (з $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ і 1)) і третій доданок (з теореми Лебега для $f\mathrm{I}_{\{|f_n-f|\ge\varepsilon\}}$). При доведенні в інший бік, з $\int\limits_{\mathsf{X}}|f_n-f|\,d\lambda \to 0$ отримуємо обмеженість $\int_{\mathsf{X}}|f_n|\,d\lambda$, $n\ge 1$. Також маємо

$$\sup_n\int\limits_{\mathsf{A}}|f_n|\,d\lambda \le \sup_{n\le n_0}\int\limits_{\mathsf{A}}|f_n|\,d\lambda + \sup_{n>n_0}\int\limits_{\mathsf{X}}|f_n-f|\,d\lambda + \int\limits_{\mathsf{A}}|f|\,d\lambda$$

Вибором великого n_0 зменшуємо другий доданок, при фіксованому n_0 для малого $\lambda(\mathsf{A})$ будуть малими перший і третій доданки. Тому виконується і останнє твердження з 1).

3) Використовуємо оцінку

$$\textstyle\int_{\{|f_n|>c\}}|f_n|\,d\lambda \le c^{-\delta}\int_{\{|f_n|>c\}}|f_n|^{1+\delta}\,d\lambda \le c^{-\delta}\sup_n\int_{\mathsf{X}}|f_n|^{1+\delta}\,d\lambda.$$

Заняття 14

Д1. Оскільки $d|t|^p/dt = p|t|^{p-2}t$, $p>1$, маємо

$$\frac{d|f(x)+tg(x)|^p}{dt} = p|f(x)+tg(x)|^{p-2}(f(x)+tg(x))g(x).$$

В околі кожної $t\in\mathbb{R}$ справджуються умови теореми про диференціювання інтеграла по параметру, для перевірки інтегрованості похідної використовуємо нерівність Гельдера.

Д2. З допомогою заміни $y = nx$ доводимо, що $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}\int_{\mathbb{R}}|f(nx)|\,d\lambda_1 < +\infty$, звідки $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}|f(nx)| < +\infty \pmod{\lambda_1}$.

Д3. Спочатку перевіряємо твердження для простих g_n, потім беремо $g_n\uparrow g$, для відповідних множин будемо мати $A_y(g_n)\uparrow A_y(g)$. Далі використовуємо граничні теореми для інтеграла.

Заняття 15

Д1. $\lambda_a(\mathsf{A}) = \sum\limits_{n\in\mathsf{A}\cap\mathsf{B}} p_n,\ \lambda_s(\mathsf{A}) = \sum\limits_{n\in\mathsf{A}\setminus\mathsf{B}} q_n,\ \dfrac{d\lambda_a}{d\mu}(\mathsf{C}) = \sum\limits_{n\in\mathsf{B}\cap\mathsf{C}}\dfrac{p_n}{q_n}.$

Д2. Нехай $f = \dfrac{d\tau}{d\mu}$, $g = \dfrac{d\mu}{d\lambda}$. Тоді $f,g\ge 0$, існують прості функції $f_n\uparrow f$, $f_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_{kn}\mathrm{I}_{\mathsf{A}_{kn}}$. Маємо

$$\tau(\mathsf{A}) = \int_{\mathsf{A}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathsf{A}} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} a_{kn}\mu\big(\mathsf{A}\cap\mathsf{A}_{kn}\big) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} a_{kn}\int_{\mathsf{A}\cap\mathsf{A}_{kn}} g\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathsf{A}} f_n g\,d\lambda = \int_{\mathsf{A}} fg\,d\lambda\,.$$

В останній рівності використали теорему про інтегрування неспадної невід'ємної послідовності.

Д3. Нехай $g_k = \dfrac{d\mu_k}{d\lambda}$, $g_k\ge 0$. Маємо

$$\mu(\mathsf{A}) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\mathsf{A}) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathsf{A}} g_k\,d\lambda = \int_{\mathsf{A}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} g_k\Big)\,d\lambda,$$

де ми використали твердження про інтегрування функціонального ряду.

Д4. Для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо $\delta > 0$ з означення абсолютної неперервності f. Виберемо таке α, що

$$\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k) < \alpha \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|g(d_k) - g(c_k)| < \delta,\ (c_k, d_k) \subset [c, d] \text{ неперетинні.}$$

Тоді $\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k) < \alpha \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(g(d_k)) - f(g(c_k))| < \varepsilon$.

Д5. Для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо $\delta > 0$ з означення абсолютної неперервності. Використовуючи означення міри Лебега як зовнішньої міри, візьмемо неперетинні півінтервали $\cup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k] \supset \mathsf{A}$, $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$. Маємо $f([a_k, b_k]) = [c_k, d_k] = [f(x_k), f(y_k)]$, $x_k,\ y_k \in [a_k, b_k]$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k| < \delta \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty}\big|f(x_k) - f(y_k)\big| \le \varepsilon \ \Rightarrow\ \lambda_1(f(\mathsf{A})) \le \varepsilon.$$

Заняття 16

Д1. Якщо f_n не збігаються за λ_2, то існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для $\mathsf{A}_n = \{|f_n(x, y)| \ge \varepsilon_0\}$ буде $\lambda_2(\mathsf{A}_n) \ge \varepsilon_0$ для нескінченної кількості номерів n. Для кожного такого n знайдеться $y_n \in [0, 1]$ таке, що для відповідного перерізу буде $\lambda_1\big((\mathsf{A}_n)_{y_n}\big) \ge \varepsilon_0$. Тоді для $g_n(x) \equiv y_n$ не виконується умова задачі.

Д2. Якщо твердження невірне, знайдеться $a \in \mathbb{R}$ таке, що:

$$\lambda_2(\{(x, y) : f(x, y) > a\}) > 0, \quad \lambda_2(\{(x, y) : f(x, y) \le a\}) > 0.$$

З умови та теореми про добуток мір випливає що ці множини містять вертикальні та горизонтальні відрізки довжини 1, що будуть перетинатися. Отримали суперечність.

Д3. F_2 обмежена, є поточковою границею вимірних функцій (інтегральних сум Рімана), а тому вимірна і інтегровна за Лебегом. Розглядаючи інтегральні суми Рімана для F_1, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} F_1(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_{[0,1]}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, y)(x_k - x_{k-1})\, d\lambda_1(y) \to \int_{[0,1]} F_2(y)\, d\lambda_1(y),$$

де остання границя випливає з поточкової збіжності підінтегральних функцій та теореми Лебега при $\max_k |x_k - x_{k-1}| \to 0$.

Д4. Досить розглянути випадок $p = 1$, тоді інтеграл в лівій частині можна записати як

$$\int_{\mathsf{X}}\int_{\mathsf{Y}}\Big(\int_{\mathsf{X}}|f(x, y)|\, d\lambda(x)\Big)^{q-1}|f(z, y)|\, d\mu(y)\, d\lambda(z)\,.$$

Потім до внутрішнього інтеграла за μ застосовуємо нерівність Гельдера з показниками $q/(q-1)$ і q.

Д5. Якщо є скінченним подвійний інтеграл, то для деякого y буде $\int_{\mathbb{R}}(x + y)^2\, d\lambda(x) < +\infty$, також маємо $x^2 \le 2(x + y)^2 + 2y^2$, звідки випливає інтегровність x^2 за $d\lambda$.

Д6. Нехай f вимірна. Зводимо до випадку $\mathsf{A} \subset [a, b]$ і обмеженої f, беремо прості вимірні $p_n \downarrow f$. Тоді

$$\mathsf{B} = \textstyle\bigcap_{n\ge1}\{(x, y) \mid 0 \le y \le p_n(x),\ x \in \mathsf{A}\} \in \mathcal{S}_2.$$

З неперервності міри λ_2 зверху і теореми Лебега маємо, що

$$\lambda_2(\mathsf{B}) = \lim_{n\to\infty}\lambda_2\big(\{0 \le y \le p_n(x)\}\big) = \lim_{n\to\infty}\textstyle\int_{\mathsf{A}} p_n\ d\lambda_1 = \int_{\mathsf{A}} f\ d\lambda_1.$$

Якщо $\mathsf{B} \in \mathcal{S}_2$, то міра перерізу $\lambda_1(\mathsf{B}_x) = f(x)$ є вимірною за теоремою про добуток мір.

Заняття 17

Д1. Прикладом може бути "плаваюча сходинка": $\{f_n\ :\ n \ge 1\} = \big\{\mathrm{I}_{[\frac{i-1}{j}, \frac{i}{j}]},\ j \ge 1,\ 1 \le i \le j\big\}$.

Д2. Двічі використаємо нерівність Гельдера для степенів p і $p/(p-1)$, а потім $q(p-1)/p = (q+r)/r$ і $(q+r)/q$, отримуємо

$$\|fgh\|_1 \le \|f\|_p\Big(\int_{\mathsf{X}}|gh|^{p/(p-1)}\, d\lambda\Big)^{(p-1)/p} \le \|f\|_p\Big(\int_{\mathsf{X}}|g|^q\, d\lambda\Big)^{1/q}\Big(\int_{\mathsf{X}}|h|^r\, d\lambda\Big)^{1/r}.$$

Підрахунок степенів підтверджує, що ми отримаємо $|h|^r$ в останньому інтегралі.

Д3. Треба застосувати нерівність Гельдера для добутку $|f|^r \cdot |f|^{s-r}$ та показників степеня p/r і $p/(p-r)$, де $r = (pq - sp)/(q - p)$.

Д4. З нерівності Гельдера випливає, що заданий в умові супремум не перевищує $\|f\|_p$. З іншого боку, розглянемо

$$h = |f|^{p/q-1}f,\ g = h/\|h\|_q \Rightarrow \int_{\mathsf{X}} fg\, d\lambda = \int_{\mathsf{X}}|f|^p/\|h\|_q\, d\lambda = \|f\|_p\,.$$

Тут враховано, що $\frac{p}{q} + 1 = p\big(1 - \frac{1}{p}\big) + 1 = p$.

Д5. Позначимо $K = \|f\|_\infty$. Оскільки $|f| \le K \pmod{\lambda}$, то

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{1/p} \le \big(K^p \lambda(\mathsf{X})\big)^{1/p} \to K, \ p \to \infty.$$

Зокрема, із скінченності інтеграла отримуємо 1). Також для довільного $\varepsilon > 0$ будемо мати $\delta := \lambda\big(\{x : \ |f(x)| \ge K - \varepsilon\}\big) > 0$, тому

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{1/p} \ge \big((K-\varepsilon)^p \delta\big)^{1/p} \to K - \varepsilon, \ p \to \infty.$$

Значить, $\underline{\lim}_{p\to\infty} \|f\|_p \ge K - \varepsilon$. Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, отримуємо 2).

Д6. Для функцій $f \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ (неперервних функцій з обмеженою множиною $\{f \ne 0\}$) твердження вірне, адже такі f рівномірно неперервні і обмежені. Оскільки $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ щільна в $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \ f \in \mathsf{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1) \ \exists\, g \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}) : \ \|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Тоді

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^p \, d\lambda_1(x)\Big)^{1/p} = \overline{\lim_{t\to 0}} \, \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p \le$$
$$\overline{\lim_{t\to 0}} \big(\|f(\cdot - t) - g(\cdot - t)\|_p + \|g(\cdot - t) - g(\cdot)\|_p + \|g(\cdot) - f(\cdot)\|_p\big) \le 2\varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, отримуємо твердження задачі.

ОРІЄНТОВНИЙ СПИСОК ПИТАНЬ ДЛЯ ІСПИТУ

1. Означення основних класів множин
2. Породжені класи множин
3. Дві теореми про породжені класи
4. Борельові множини
5. Функції множин. Міри
6. Приклади мір
7. Зовнішні міри
8. Теорема Каратеодорі. Повні міри
9. Продовження міри з півкільця на породжене σ-кільце
10. Міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Міра Лебега–Стілтьєса в $\mathbb{R}$
11. Регулярність мір
12. Означення вимірної функції. Приклади
13. Дії з вимірними функціями
14. Наближення вимірних функцій простими
15. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь
16. Теорема Єгорова
17. Збіжність за мірою
18. Фундаментальність за мірою
19. Означення інтеграла
20. Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій
21. Зліченна адитивність інтеграла
22. Елементарні властивості інтеграла
23. Лінійність інтеграла
24. Граничні теореми для інтеграла
25. Порівняння інтеграла Лебега та інтеграла Рімана
26. Критерій Лебега інтегровності за Ріманом на $[a, b]$
27. Інтеграл, що залежить від параметра. Заміна змінної
28. Означення заряду. Розклади Гана та Жордана
29. Теорема Радона-Никодима
30. Розклад Лебега
31. Абсолютно неперервні функції на $[a, b]$
32. Абсолютна неперервність відносно міри Лебега на $[a, b]$
33. Множини та функції на добутку просторів
34. Добуток мір
35. Теореми Тонеллі і Фубіні
36. Нерівності Гельдера і Мінковського
37. Простір L_p
38. Щільні підмножини L_p