Вступ

Метою дисципліни "Теорія міри та інтеграла" є побудова основ загальної теорії міри, визначення та дослідження основних властивостей інтеграла Лебега.

Поняття міри є узагальненням таких числових характеристик множин як довжина, площа, об'єм. Ці характеристики застосовуються в різних просторах, для різних класів множин, але їх значення мають спільні риси: вони невід'ємні, і для об'єднання двох неперетинних множин дорівнюють сумі значень цих двох множин.

Як це часто робиться в математиці, замість окремого вивчення довжини, площі, об'єму тощо, ми досліджуємо загальну числову функцію множин — міру, що визначена на певному абстрактному наборі множин і задовольняє дві вказані властивості. Додатково, від міри ми вимагатимемо виконання умови σ-адитивності: міра об'єднання зліченної кількості неперетинних множин дорівнює сумі мір окремих множин. Ця умова дасть можливість широкого застосування граничного переходу в наших міркуваннях.

Нетривіальними проблемами є можливість визначення такої σ-адитивної функції на достатньо широкому класі множин, можливість продовження міри з одного класу множин на інший. Цим питанням присвячена значна частина нашої дисципліни.

На підставі поняття міри дамо означення інтеграла Лебега. Не розбираючи зараз деталі, відмітимо основну різницю інтеграла Лебега та інтеграла Рімана. Інтеграл Рімана від обмеженої функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — це границя інтегральних сум вигляду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad \max_k (x_{k+1} - x_k) \to 0\,.$$

Інтеграл Лебега від цієї ж f за мірою λ дорівнює границі сум вигляду

$$\sum_{i=0}^{j-1} c_i \lambda\big(\{x \in [a, b] : f(x) \in (y_i, y_{i+1}]\big), \quad -M = y_0 < y_1 < \cdots < y_j = M,$$
$$c_i \in (y_i, y_{i+1}], \quad \max_i (y_{i+1} - y_i) \to 0$$

(тут M — таке значення, при якому $|f(x)| < M$ на $[a, b]$). Ми бачимо, що для інтеграла Рімана береться розбиття множини значень аргументу, для інтеграла Лебега — множини значень функції, але при цьому треба мати означення міри λ відповідних множин.

Покажемо, що всі функції, інтегровні за Ріманом на $[a, b]$, будуть інтегровними за Лебегом (для відповідної міри λ). Для інтеграла Лебега є зручні в застосуваннях граничні теореми. Також досить загальними є умови зведення кратного інтеграла Лебега до повторного.

Зручні властивості інтеграла Лебега разом із природністю його означення привели до того, що він став певним стандартом у математиці. У більшості математичних робіт при записі інтеграла неявно вважається, що взято саме інтеграл у сенсі Лебега.

Розвиток теорії міри й інтеграла Лебега був надзвичайно швидким. Перше означення міри довільної множини дав Кантор в 1883 р., у роботах Пеано (1887 р.) і Жордана (1892 р.) вивчено поняття, яке ми зараз називаємо мірою Жордана. Міра Жордана стала важливим інструментом в означенні інтеграла Рімана, проте мала істотний недолік — зліченне об'єднання вимірних за Жорданом множин не обов'язково вимірне.

Борель у своїй роботі 1898 р. зазначив недоліки міри Жордана і накреслив шляхи їх виправлення. Користуючись цими вказівками, Лебег у своїй дисертації 1902 р. побудував міру на підмножинах $\mathbb{R}$, навів нову конструкцію інтеграла й основні його властивості. Майже одразу почали досліджувати інтеграл Лебега й інші математики, з'явилися важливі роботи Фубіні (1907 р.), Єгорова (1911 р.), Ріса (1912 р.), Радона (1913 р.), Каратеодорі (1918 р.). Ці публікації вже містять практично всі основні твердження нашої дисципліни.

Міра має визначатися на певному наборі множин, тому вивчення почнемо з основних класів множин (розділ 1). У розділі 2 показано, як визначається міра на достатньо багатому наборі множин, наведено деякі конкретні приклади мір. Розділ 3 присвячено дослідженню так званих вимірних функцій, саме для таких функцій має сенс означення інтеграла Лебега, що розглядається далі в розділі 4. Потім ми розглянемо функції множин, що не обов'язково є невід'ємними (розділ 5), зв'язок між кратним та повторним інтегралами (розділ 6), властивості набору інтегровних функцій як лінійного метричного простору (розділ 7).

Наприкінці кожного розділу подано кілька вправ. Як правило, у них міститься певне доповнення теоретичного матеріалу розділу.

Від читача очікується володіння основами математичного аналізу (наприклад, у межах матеріалу з [7]).

Посібник написано на основі дисципліни "Теорія міри та інтеграла", що читається студентам третього курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (обсяг лекцій — 60 годин). Автор вдячний усім колегам з кафедри математичного аналізу вказаного університету, їхні поради суттєво сприяли покращенню викладення матеріалу.

Основні позначення

2^{X} — набір усіх підмножин X

$\forall$ — "для всіх"

$\exists$ — "існує"

$:=$ — "покладемо рівним за означенням", "є рівним за означенням"

$|A|$ — кількість елементів множини A ($|A| = +\infty$ для нескінченної множини A)

$A_n \uparrow A$ — послідовність множин, для якої $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$A_n \downarrow A$ — послідовність множин, для якої $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симетрична різниця множин A і B

$\mathbb{AC}([a,b])$ — множина функцій, абсолютно неперервних на $[a,b]$

$\mathcal{B}(\mathsf{Y})$ — борельова σ-алгебра підмножин метричного простору Y

$\mathbb{BV}([a,b])$ — множина функцій, що мають обмежену варіацію на $[a,b]$

$E_{x_1} = \{x_2 \in \mathsf{X}_2 : \ (x_1, x_2) \in E\}$, де $E \subset \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$, $x_1 \in \mathsf{X}_1$ (x_1– переріз множини E)

$f_+(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{f \geq 0\}}(x)$

$f_-(x) = -f(x)\mathbf{1}_{\{f < 0\}}(x)$

$f_n \xrightarrow{\lambda} f$ — функції f_n збігаються до функції f за мірою λ

$f_{x_1}(x_2)$ — для $f(x_1, x_2) : \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ це функція аргументу $x_2 \in \mathsf{X}_2$ при фіксованому $x_1 \in \mathsf{X}_1$

$\|f\|_p = \left(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$

$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \{A_1 \times A_2, \ A_1 \in \mathcal{H}_1, \ A_2 \in \mathcal{H}_2\}$, де $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — набори підмножин деяких просторів X_1 і X_2

$\mathcal{H} \cap B = \{A \cap B, \ A \in \mathcal{H}\}$, де $\mathcal{H}$ — набір підмножин X, $B \subset \mathsf{X}$

$\mathbf{1}_A(x)$ — функція, що дорівнює 1 при $x \in A$ та дорівнює 0 при $x \notin A$ (індикатор множини A)

$k(\mathcal{H})$, $a(\mathcal{H})$, $\sigma k(\mathcal{H})$, $\sigma a(\mathcal{H})$, $m(\mathcal{H})$ — відповідно кільце, алгебра, σ-кільце, σ-алгебра, монотонний клас, породжені набором множин $\mathcal{H}$

$\mathcal{K}_{\mathsf{m}}$ — кільце підмножин $\mathbb{R}^d$, вимірних за Жорданом

λ_d — міра Лебега в $\mathbb{R}^d$

λ_F — міра Лебега–Стілтьєса в $\mathbb{R}$, породжена функцією $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathsf{L}(A, \lambda)$ — клас функцій, інтегровних на множині A за мірою λ

m — міра Жордана в $\mathbb{R}^d$

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел

$\nu \ll \lambda$ — заряд ν абсолютно неперервний відносно міри λ

$\nu \perp \lambda$ — заряд ν сингулярний відносно міри λ

$\mathcal{P}_d = \left\{\prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \,\middle|\, a_k, \ b_k \in \mathbb{R}\right\}, \quad a_k \leq b_k$

$\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел

$\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$\mathcal{S}$ — σ-алгебра множин, вимірних за Каратеодорі (відносно зовнішньої міри, указаної в контексті)

$\mathcal{S}_d$ — σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}^d$, вимірних за Лебегом

$\mathcal{S}_F$ — σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}$, вимірних за Лебегом–Стілтьєсом для функції $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{V}(f, [c, d])$ — значення варіації функції f на $[c, d]$

$\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел

Власт. — властивість

м. с. — майже скрізь

Розділ 1
Основні класи множин

1.1. Означення основних класів множин

Однією з цілей дисципліни "Теорія міри та інтеграла" є побудова теорії міри. Міра — це функція, яка кожній вимірній множині ставить у відповідність деяке число. При цьому не обов'язково кожна множина має міру (тобто є вимірною), але важливою є наявність певних властивостей. Природно вимагати, щоб об'єднання двох неперетинних вимірних множин мало міру, яка дорівнює сумі мір цих двох частин.

Таким чином, міра визначатиметься на певному класі множин, і ці класи не можуть бути цілком довільними. Ми почнемо побудову теорії з вивчення різних класів множин, на яких нижче і будуватиметься міра.

Нехай X — деяка фіксована непорожня множина, яку називатимемо універсальною. Усі класи множин нижче — це набори підмножин X. Через 2^{X} позначимо набір усіх підмножин X (включаючи порожню множину і саму X).

Означення 1.1. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається *кільцем*, якщо
1) $\forall A,\ B \in \mathcal{H}:\ A \cup B \in \mathcal{H}$;
2) $\forall A,\ B \in \mathcal{H}:\ A \setminus B \in \mathcal{H}$.

Означення 1.2. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається *алгеброю*, якщо
1) $\mathcal{H}$ є кільцем;
2) $\mathsf{X} \in \mathcal{H}$.

Приклад 1.1. $\mathcal{H} = 2^{\mathsf{X}}$ є алгеброю.

Приклад 1.2. Нехай X — довільна нескінченна множина. Тоді клас усіх скінченних підмножин X є кільцем.

Приклад 1.3. Набір усіх скінченних підмножин X та їх доповнень є алгеброю.

Властивості кілець. Нехай $\mathcal{K}$ — кільце.

1. $\varnothing \in \mathcal{K}$. *Доведення.* Оскільки $\mathcal{K} \neq \varnothing$, знайдеться $A \in \mathcal{K}$, і тоді $\varnothing = A \setminus A \in \mathcal{K}$. □

2. $\forall A,\ B \in \mathcal{K}:\ A \cap B \in \mathcal{K}$. *Доведення.* $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, різниця елементів кільця належить кільцю. □

3. $\forall A_k \in \mathcal{K},\ 1 \le k \le n:\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k,\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$.

Означення 1.3. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається *півкільцем*, якщо

1) $\forall A,\ B \in \mathcal{H} :\ A \cap B \in \mathcal{H}$;

2) $\forall A,\ B \in \mathcal{H} :\ A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ для деяких неперетинних $C_1,\ \ldots,\ C_n \in \mathcal{H}$.

Відмітимо, що якщо $\mathcal{P}$ — півкільце, то $\varnothing \in \mathcal{P}$. Адже для довільної множини $A \in \mathcal{P}$ для деяких $C_k \in \mathcal{P}$ буде $\varnothing = A \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, що можливо лише для $C_k = \varnothing$.

Означення півкільця здається дещо штучним, але до нього додається наступний важливий приклад.

Приклад 1.4. $\mathcal{P}_1 := \big\{(a,b]\ \big|\ a,\ b \in \mathbb{R}\big\}$ є півкільцем підмножин $\mathbb{R}$.

Зауваження 1.1. У записі півінтервала $(a,b]$ завжди вважаємо $a \le b$, причому $(a,b] = \varnothing$ при $a = b$.

Наступне твердження дасть нам додаткові приклади півкілець.

Теорема 1.1. *Нехай $\mathcal{H}_1$ — півкільце підмножин X_1, $\mathcal{H}_2$ — півкільце підмножин X_2. Тоді клас множин*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 := \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{H}_1,\ A_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

буде півкільцем підмножин $\mathsf{X} = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$.

Доведення. Перевіримо виконання означення півкільця.

$\mathcal{H}$ — непорожній клас, оскільки знайдуться хоча б по одному елементу $A_1 \in \mathcal{H}_1$, $A_2 \in \mathcal{H}_2$, і тоді $A_1 \times A_2 \in \mathcal{H}$.

Нехай $A,\ B \in \mathcal{H}$, $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$. Стандартними міркуваннями легко перевіряється, що

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)\,,$$

маємо

$$A_1,\ B_1 \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow A_1 \cap B_1 \in \mathcal{H}_1, \quad A_2,\ B_2 \in \mathcal{H}_2 \Rightarrow A_2 \cap B_2 \in \mathcal{H}_2,$$

і $A \cap B \in \mathcal{H}$ за визначенням класу $\mathcal{H}$.

Також нескладно перевіряється, що

$$A \backslash B = (A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2) = \big[(A_1 \setminus B_1) \times A_2\big] \bigcup \big[(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big].$$

Оскільки $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_2$ — півкільця, то

$$A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{k=1}^{n} C_k,\ C_k \in \mathcal{H}_1, \quad A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{i=1}^{j} D_i,\ D_i \in \mathcal{H}_2,$$

і отримуємо

$$A \setminus B = [\bigcup_{k=1}^{n} (C_k \times A_2)] \bigcup [\bigcup_{i=1}^{j} ((A_1 \cap B_1) \times D_i)]. \tag{1.1}$$

Нагадаємо, що $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{H}_1$. За визначенням $\mathcal{H}$, усі декартові добутки у правій частині (1.1) належать $\mathcal{H}$ і не перетинаються для неперетинних C_k і D_i. Таким чином, $A \setminus B$ зображується у вигляді скінченного об'єднання елементів $\mathcal{H}$, означення 1.3 справджується. □

Вочевидь, ця теорема узагальнюється на клас множин

$$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_d := \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d,\ A_k \in \mathcal{H}_k\}.$$

Використовуючи приклад 1.4, отримаємо такий приклад.

Приклад 1.5. Набір

$$\mathcal{P}_d := \Big\{ \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \ \big|\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

є півкільцем підмножин $\mathbb{R}^d$, адже $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_1$.

Для розгляду міри зліченних об'єднань або перетинів множин важливими є такі поняття.

Означення 1.4. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається σ-*кільцем*, якщо
1) $\forall A_n \in \mathcal{H},\ n \geq 1 :\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$;
2) $\forall A,\ B \in \mathcal{H} :\ A \setminus B \in \mathcal{H}$.

Приклад 1.6. Клас $\mathcal{H}$ всіх скінченних і зліченних підмножин X є σ-кільцем.

Означення 1.5. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається σ-*алгеброю*, якщо
1) $\mathcal{H}$ є σ-кільцем;
2) $\mathsf{X} \in \mathcal{H}$.

Приклад 1.7. Клас $\mathcal{H}$ всіх скінченних і зліченних підмножин X та їх доповнень є σ-алгеброю.

Приклад 1.8. $\mathcal{H} = \{\varnothing,\ \mathsf{X}\}$ є σ-алгеброю (інколи її називають тривіальною).

Властивості σ-кілець. Нехай $\mathcal{S}$ — σ-кільце.

1. $\mathcal{S}$ — кільце. *Доведення.* Треба перевірити умову 1) означення 1.1. Якщо $A,\ B \in \mathcal{S}$, то за властивістю 1) означення 1.4

$$A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \ldots \in \mathcal{S}. \qquad \square$$

2. $\forall A_n \in \mathcal{S},\ n \geq 1 :\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$. *Доведення.* Випливає із представлення

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \Big(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \Big). \qquad \square$$

Послідовність множин $A_n,\ n \geq 1$, називається *неспадною*, якщо $A_n \subset A_{n+1}$ для всіх n. У цьому випадку вживатимемо стандартне позначення $A_n \uparrow$ і покладемо

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.2}$$

Послідовність множин $A_n,\ n \geq 1$, називається *незростаючою*, якщо $A_n \supset A_{n+1}$ для всіх n. Тоді вживатимемо позначення $A_n \downarrow$ і візьмемо

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.3}$$

В обох цих випадках послідовність множин називається *монотонною*.

Означення 1.6. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається *монотонним класом*, якщо для будь-якої монотонної послідовності множин $A_n \in \mathcal{H}$, $n \geq 1$, буде $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{H}$.

Теорема 1.2. *Нехай клас множин $\mathcal{H}$ — кільце і монотонний клас одночасно. Тоді $\mathcal{H}$ є σ-кільцем.*

Доведення. Досить довести, що зліченне об'єднання множин з $\mathcal{H}$ належить $\mathcal{H}$. Нехай $A_n \in \mathcal{H},\ n \geq 1$. Покладемо

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Тоді $B_n \in \mathcal{H}$, оскільки $\mathcal{H}$ — кільце. Також

$$B_n \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$$

як границя зростаючої послідовності множин із монотонного класу. $\square$

1.2. Породжені класи множин

Нехай $\mathcal{H}$ — деякий непорожній клас множин. У багатьох ситуаціях треба розглядати набір множин, що, з одного боку, є замкненим відносно взяття об'єднань і різниць, а з іншого — містить усі елементи $\mathcal{H}$. Тоді береться породжений клас множин.

Означення 1.7. Кільцем, алгеброю, σ-кільцем, σ-алгеброю, монотонним класом, породженими непорожнім класом множин $\mathcal{H}$, називаються відповідно

$$k(\mathcal{H}) := \bigcap_{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H},\ \mathcal{K}_\alpha\ -\ \text{кільце}} \mathcal{K}_\alpha, \tag{1.4}$$

$$a(\mathcal{H}) := \bigcap_{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H},\ \mathcal{A}_\alpha\ -\ \text{алгебра}} \mathcal{A}_\alpha,$$

$$\sigma k(\mathcal{H}) := \bigcap_{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H},\ \mathcal{K}_\alpha\ -\ \sigma\text{-кільце}} \mathcal{K}_\alpha,$$

$$\sigma a(\mathcal{H}) := \bigcap_{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H},\ \mathcal{A}_\alpha\ -\ \sigma\text{-алгебра}} \mathcal{A}_\alpha,$$

$$m(\mathcal{H}) := \bigcap_{\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{H},\ \mathcal{M}_\alpha\ -\ \text{монотонний клас}} \mathcal{M}_\alpha.$$

Розглянемо, наприклад, породжені кільця.

Властивості породжених кілець.

1. $k(\mathcal{H})$ є кільцем. *Доведення.* $k(\mathcal{H}) \neq \varnothing$, $\varnothing \in k(\mathcal{H})$, оскільки кожне кільце $\mathcal{K}_\alpha$ в (1.4) містить $\varnothing$. Також

$$A,\ B \in k(\mathcal{H}) \overset{(1.4)}{\Longleftrightarrow} \forall\alpha:\ A,\ B \in \mathcal{K}_\alpha \overset{\mathcal{K}_\alpha - \text{кільце}}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{\mathcal{K}_\alpha - \text{кільце}}{\Longrightarrow} \forall\alpha:\ A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{K}_\alpha \overset{(1.4)}{\Longleftrightarrow} A \cup B,\ A \setminus B \in k(\mathcal{H}). \qquad \square$$

2. $k(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H}$. *Доведення.* Випливає безпосередньо з (1.4). $\square$

3. Якщо $\mathcal{K}$ — кільце і $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, то $\mathcal{K} \supset k(\mathcal{H})$. *Доведення.* У цьому випадку $\mathcal{K}$ буде одним з елементів перетину (1.4). $\square$

Властивості 1–3 дають підставу називати $k(\mathcal{H})$ мінімальним кільцем, що містить $\mathcal{H}$.

Приклад 1.9. Нехай $\mathcal{H}$ — клас усіх одноточкових множин. Тоді $k(\mathcal{H})$ — це набір усіх скінченних множин.

Для інших породжених класів легко отримуються аналоги властивостей 1–3.

Теорема 1.3. *Нехай $\mathcal{P}$ — півкільце. Тоді*

$$k(\mathcal{P}) = \big\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,\ n \geq 1, A_k \in \mathcal{P} \text{ неперетинні}\big\}. \qquad (1.5)$$

Доведення. Набір множин у правій частині (1.5) позначимо через $\mathcal{L}$ і доводитимемо, що $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$ та $k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Для множин з $\mathcal{L}$ маємо

$$A_k \in \mathcal{P} \subset k(\mathcal{P}),\ k(\mathcal{P}) - \text{кільце} \ \Rightarrow \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in k(\mathcal{P}),$$

будь-який елемент $\mathcal{L}$ належить $k(\mathcal{P})$, і тому $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$.

Для доведення включення $k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ досить довести, що $\mathcal{L}$ — кільце і використати властивість 3 (легко бачити, що $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$).

Нехай

$$A,\ B \in \mathcal{L}, \quad A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \bigcup_{i=1}^{j} B_i, \quad A_k,\ B_i \in \mathcal{P},$$

A_k і B_i неперетинні у своїх наборах.

Крок 1. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то всі $A_k \cap B_j = \varnothing$, і

$$A \cup B = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{j} B_i\Big) \in \mathcal{L}$$

як об'єднання неперетинних елементів $\mathcal{P}$.

Крок 2. Оскільки $\mathcal{P}$ — півкільце, усі $A_k \cap B_i \in \mathcal{P}$, і ці множини є неперетинними. Тому

$$A \cap B = \bigcup_{1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq j} \big(A_k \cap B_i\big) \in \mathcal{L}\,.$$

Крок 3. Для різниці множин маємо

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} \big(A_k \setminus B\big), \quad A_k \setminus B = \bigcap_{i=1}^{j} \big(A_k \setminus B_i\big).$$

Множини A_k і B_j належать півкільцю $\mathcal{P}$, тому

$$A_k \setminus B_i = \bigcup_{r=1}^{s} C_r\,, \quad C_r \in \mathcal{P} \text{ неперетинні},$$

і тому $A_k \setminus B_i \in \mathcal{L}$. Крок 2 свідчить про те, що $A_k \setminus B \in \mathcal{L}$, згідно з кроком 1 $A \setminus B \in \mathcal{L}$.

Крок 4. Для об'єднання множин отримуємо

$$A \cup B = (A \setminus B) \bigcup (A \cap B) \bigcup (B \setminus A),$$

де різні елементи об'єднання не перетинаються. Крок 3 показує, що $A \setminus B$, $B \setminus A \in \mathcal{L}$, крок 2 — що $A \cap B \in \mathcal{L}$, за кроком 1 $A \cup B \in \mathcal{L}$.

Таким чином, $\mathcal{L}$ — кільце. □

Приклад 1.10. Для півкільця півінтервалів $\mathcal{P}_1$ із прикладу 1.4 маємо

$$k(\mathcal{P}_1) = \Big\{ \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \ \Big|\ (a_k, b_k] \subset \mathbb{R} \text{ неперетинні} \Big\}.$$

Аналогічним чином визначається $k(\mathcal{P}_d)$ для півкільця $\mathcal{P}_d$ з прикладу 1.5.

1.3. Дві теореми про породжені класи

Надалі для $B \subset \mathsf{X}$ і $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ використаємо позначення

$$\mathcal{H} \cap B := \big\{ A \cap B,\ A \in \mathcal{H} \big\}.$$

Доведемо, що операції перетину з множиною і взяття породженого σ-кільця дають один і той самий результат у будь-якому порядку.

Теорема 1.4. *Для будь-якої множини $B \subset \mathsf{X}$ і довільного класу множин $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ маємо*

$$\sigma k\big(\mathcal{H} \cap B\big) = \sigma k(\mathcal{H}) \cap B\,.$$

Доведення. Рівність цих двох наборів доведемо, обґрунтувавши, що кожен із них входить в інший.

Клас множин $\sigma k(\mathcal{H}) \cap B$ є σ-кільцем. Адже для $A_n \in \sigma k(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} &\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cap B\big) = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap B, \\ &\qquad \big(A_1 \cap B\big) \setminus \big(A_2 \cap B\big) = \big(A_1 \setminus A_2\big) \cap B \in \sigma k(\mathcal{H}) \cap B, \end{aligned} \tag{1.6}$$

оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_1 \setminus A_2 \in \sigma k(\mathcal{H})$.

Маємо

$$\mathcal{H} \subset \sigma k(\mathcal{H}) \Rightarrow \big(\mathcal{H} \cap B\big) \subset \big(\sigma k(\mathcal{H}) \cap B\big) \Rightarrow \sigma k\big(\mathcal{H} \cap B\big) \subset \big(\sigma k(\mathcal{H}) \cap B\big).$$

Щоб отримати протилежне включення, розглянемо клас множин

$$\mathcal{L} = \{A \cup (C \setminus B),\ A \in \sigma k(\mathcal{H} \cap B),\ C \in \sigma k(\mathcal{H})\}. \tag{1.7}$$

Аналогічно (1.6), нескладно перевірити, що $\mathcal{L}$ — σ-кільце. Для $D \in \mathcal{H}$ запишемо

$$D = (D \cap B) \cup (D \setminus B), \quad D \cap B \in (\mathcal{H} \cap B) \subset \sigma k(\mathcal{H} \cap B),$$

$$D \in \sigma k(\mathcal{H}) \Rightarrow D \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{L} \overset{\mathcal{L}-\sigma-\text{кільце}}{\Longrightarrow} \sigma k(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma k(\mathcal{H}) \cap B) \subset (\mathcal{L} \cap B) \overset{(1.7)}{=} \sigma k(\mathcal{H} \cap B). \quad \square$$

Наступне твердження часто є корисним при доведенні того, що певний клас множин є σ-кільцем.

Теорема 1.5. *Нехай $\mathcal{K}$ — кільце множин. Тоді $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$.*

Доведення. σ-кільце є класом множин, замкненим відносно взяття зліченних об'єднань і перетинів, і тому є монотонним класом. Маємо

$$\mathcal{K} \subset \sigma k(\mathcal{K}) \overset{\sigma k(\mathcal{K})-\text{мон. клас}}{\Longrightarrow} m(\mathcal{K}) \subset \sigma k(\mathcal{K})\,.$$

Доведемо протилежне включення. Якщо доведемо, що $m(\mathcal{K})$ є кільцем, то, за теоремою 1.2, $m(\mathcal{K})$ буде σ-кільцем. Оскільки $\mathcal{K} \subset m(\mathcal{K})$, тоді матимемо потрібне включення $\sigma k(\mathcal{K}) \subset m(\mathcal{K})$.

Для будь-якої множини $A \in m(\mathcal{K})$ розглядатимемо клас множин

$$\mathcal{L}(A) = \{B \subset \mathsf{X} :\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A \in m(\mathcal{K})\}.$$

Тоді $\mathcal{L}(A)$ є монотонним класом. Якщо, наприклад, $C_n \in \mathcal{L}(A)$, $C_n \uparrow C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, то

$$A \cup C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cup C_n),\ (A \cup C_n) \in m(\mathcal{K}),\ (A \cup C_n) \uparrow (A \cup C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A \cup C) \in m(\mathcal{K}),$$

$$A \setminus C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n),\ (A \setminus C_n) \in m(\mathcal{K}),\ (A \setminus C_n) \downarrow (A \setminus C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A \setminus C) \in m(\mathcal{K}),$$

$$C \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus A),\ (C_n \setminus A) \in m(\mathcal{K}),\ (C_n \setminus A) \uparrow (C \setminus A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (C \setminus A) \in m(\mathcal{K}).$$

Так ми перевірили, що $C \in \mathcal{L}(A)$.

Цілком аналогічно доводимо, що $C \in \mathcal{L}(A)$, коли $C_n \downarrow C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. При цьому лише $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ міняється в записах із $\bigcap_{n=1}^{\infty}$, а $\uparrow$ — із $\downarrow$.

Нехай $A \in \mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{K}$ — кільце, для будь-якої $B \in \mathcal{K}$ одержимо

$$(A \cup B),\ (A \setminus B),\ (B \setminus A) \in \mathcal{K} \subset m(\mathcal{K}), \quad A,\ B \in \mathcal{K},$$

і тому $B \in \mathcal{L}(A)$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(A)$. Із того, що $\mathcal{L}(A)$ — монотонний клас, випливає, що $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(A)$.

Значить, для будь-якої множини $B \in m(\mathcal{K})$ маємо $B \in \mathcal{L}(A)$, і тому

$$(A \cup B),\ (A \setminus B),\ (B \setminus A) \in m(\mathcal{K}), \quad A \in \mathcal{K},\ B \in m(\mathcal{K}).$$

Це означає, що $A \in \mathcal{L}(B)$. Отже, тут $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(B)$. З того, що $\mathcal{L}(B)$ — монотонний клас, випливає, що $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(B)$, тепер вже для $B \in m(\mathcal{K})$.

Таким чином, якщо $A \in m(\mathcal{K})$, то $A \in \mathcal{L}(B)$, звідки

$$(A \cup B),\ (A \setminus B),\ (B \setminus A) \in m(\mathcal{K}), \quad A,\ B \in m(\mathcal{K}).$$

Це ми довели для довільних $A,\ B \in m(\mathcal{K})$, і тому $m(\mathcal{K})$ є кільцем. □

1.4. Борельові множини

Одним із найважливіших прикладів породжених σ-алгебр є клас борельових множин.

Нехай Y — метричний простір, $\mathcal{G}$ — набір усіх відкритих підмножин Y.

Означення 1.8. *Борельовою σ-алгеброю* в Y називається

$$\mathcal{B}(\mathsf{Y}) := \sigma a(\mathcal{G}).$$

Множини з $\mathcal{B}(\mathsf{Y})$ називатимемо борельовими.

Приклади борельових множин.

1. Якщо множина U відкрита, то вона борельова. Адже

$$U \in \mathcal{G} \subset \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathsf{Y}).$$

2. Якщо множина F замкнена, то вона борельова. У цьому випадку множина $\mathsf{X} \setminus F$ відкрита, тому $(\mathsf{X} \setminus F) \in \mathcal{B}(\mathsf{Y})$, і

$$F = \mathsf{X} \setminus (\mathsf{X} \setminus F) \in \mathcal{B}(\mathsf{Y})$$

як різниця елементів σ-алгебри.

3. Одноточкова множина є борельовою, адже вона замкнена.

4. Усі скінченні, зліченні множини та їх доповнення — борельові. Ці множини отримуються з одноточкових за допомогою операцій, ''дозволених'' у σ-алгебрі.

Наступне твердження показує, що борельову σ-алгебру $\mathbb{R}^d$ можна отримати по-різному.

Теорема 1.6. *Для півкільця підмножин* $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{P}_d = \Big\{ \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \mid a_k,\ b_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

справджується

$$\sigma k\,(\mathcal{P}_d) = \sigma a\,(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)\,.$$

Доведення. Спочатку відмітимо, що

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d,$$

$\mathbb{R}^d \in \sigma k\,(\mathcal{P}_d)$ як зліченне об'єднання елементів $\mathcal{P}_d$, і тому

$$\sigma k\,(\mathcal{P}_d) = \sigma a\,(\mathcal{P}_d)\,. \tag{1.8}$$

Для множин

$$A_n = \prod_{k=1}^{d} \Big(a_k, b_k + \frac{1}{n}\Big), \quad A = \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k]$$

маємо, що $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$ як відкрита множина, і тому

$$A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}_d \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \Rightarrow \sigma a\,(\mathcal{P}_d) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big). \tag{1.9}$$

Тепер доведемо протилежне включення. Нехай U — відкрита підмножина $\mathbb{R}^d$. Тоді

$$U = \bigcup_{p_k, q_k \in \mathbb{Q}:\ \prod_{k=1}^{d}(p_k, q_k] \subset U} \ \prod_{k=1}^{d} (p_k, q_k]. \tag{1.10}$$

Дійсно, права частина (1.10) є об'єднанням підмножин U, і тому сама є підмножиною U. З іншого боку, будь-яка точка $x = (x_1, \dots, x_d) \in U$ має ε-окіл $\mathsf{B}(x, \varepsilon) \subset U$. Тоді

$$\prod_{k=1}^{d} \Big(x_k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}, x_k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}} \Big] \subset \mathsf{B}(x, \varepsilon) \subset U,$$

отже можемо вибрати

$$p_k, q_k \in \mathbb{Q}: \; x_k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}} < p_k < x_k < q_k < x_k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}$$

і отримати, що $x \in \prod_{k=1}^{d} \big(p_k, q_k\big]$. Значить, U є підмножиною правої частини (1.10), рівність (1.10) справджується.

У (1.10) маємо зліченне об'єднання елементів $\mathcal{P}_d$. Тому

$$U \in \sigma a\left(\mathcal{P}_d\right) \Rightarrow \mathcal{G} \subset \sigma a\left(\mathcal{P}_d\right) \Rightarrow \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \subset \sigma a\left(\mathcal{P}_d\right). \qquad (1.11)$$

Із рівностей (1.8), (1.9) і (1.11) випливає твердження теореми. $\square$

Вправи

Вправа 1.1. Нехай $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$, $\mathsf{X} \in \mathcal{H}$, де $\mathcal{H}$ — замкнений відносно взяття доповнень та зліченних перетинів. Довести, що $\mathcal{H}$ — σ-алгебра.

Вправа 1.2. Для довільної послідовності множин A_n, $n \geq 1$, покладемо

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Якщо

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n, \qquad (1.12)$$

говоритимемо, що $\lim_{n\to\infty} A_n$ існує і дорівнює (1.12). Показати, що

1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$;

2) для монотонної послідовності множин $\lim_{n\to\infty} A_n$ існує і збігається із множинами в (1.2) і (1.3).

Вправа 1.3. Нехай $\mathcal{H}$ — довільний клас підмножин X. Додамо до $\mathcal{H}$ усі доповнення множин з $\mathcal{H}$, порожню множину, множину X, і позначимо через $\mathcal{H}_1$ отриманий набір. Нехай $\mathcal{H}_2$ — клас усіх скінченних перетинів множин з $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_3$ — клас усіх скінченних об'єднань множин з $\mathcal{H}_2$. Показати, що $\mathcal{H}_3 = a(\mathcal{H})$.

Вправа 1.4. Непорожній клас $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається *σ-адитивним класом*, якщо $\mathsf{X} \in \mathcal{H}$ і він замкнений відносно взяття зліченних об'єднань неперетинних множин та відносно взяття різниць $A \setminus B$, $B \subset A$. Довести твердження: якщо клас $\mathcal{E}$ замкнений відносно скінченних перетинів, то σ-адитивний клас, породжений $\mathcal{E}$, збігається з $\sigma a(\mathcal{E})$.

Розділ 2
Міри. Продовження мір

2.1. Функції множин. Міри

Ми будемо розглядати функції множин $\lambda : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$, де $\mathcal{H}$ — довільний набір підмножин X. У наступному означенні зібрано визначення кількох важливих для нас класів функцій множин.

Означення 2.1. Функція множин $\lambda : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ називається

1) *невід'ємною*, якщо

$$\forall\ A \in \mathcal{H}:\ \lambda(A) \geq 0;$$

2) *адитивною (скінченно-адитивною)*, якщо

$$\forall\ A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{H}\ (\text{неперетинних}),\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{H}:\ \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k);$$

3) *σ-адитивною (зліченно-адитивною)*, якщо

$$\forall\ A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{H}\ (\text{неперетинних}),\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}:\ \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k);$$

4) *півадитивною (скінченно-півадитивною)*, якщо

$$\forall\ A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{H},\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{H}:\ \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k);$$

5) *σ-півадитивною (зліченно-півадитивною)*, якщо

$$\forall\ A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{H},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}:\ \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k);$$

6) *монотонною*, якщо

$$\forall\ A,\ B \in \mathcal{H},\ A \subset B:\ \lambda(A) \leq \lambda(B);$$

7) *скінченною*, якщо

$$\forall\ A \in \mathcal{H}:\ \lambda(A) < +\infty;$$

8) *σ-скінченною*, якщо

$$\exists\, \mathsf{X}_1,\ \mathsf{X}_2,\ \ldots \in \mathcal{H}:\ \mathsf{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{X}_k \text{ і всі } \lambda\big(\mathsf{X}_k\big) < +\infty.$$

За наявності нескінченних значень у сумах, використовуємо природні узгодження:

$$a + (+\infty) = +\infty\ (a \in \mathbb{R}), \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty\,,$$

значення $(+\infty) + (-\infty)$ вважається невизначеним.

Узгодження. Ми не розглядаємо функції множин, усі значення яких дорівнюють $+\infty$. Тобто, завжди вважаємо, що $\exists\, A:\ \lambda(A) < +\infty$.

Наступне означення є одним із головних у посібнику.

Означення 2.2. *Мірою* називається невід'ємна σ-адитивна функція множин, задана на півкільці.

Доведення σ-адитивності, як правило, є непростим, тому зараз ми обмежимося лише двома прикладами, для яких виконання означення очевидне.

Приклад 2.1. Для фіксованого $x \in \mathsf{X}$ функція множин $\lambda(A) = \mathbf{1}_A(x)$ буде мірою на 2^{X}.

Приклад 2.2. Розглянемо $\mathsf{X} = \mathbb{R}$ і покладемо $\lambda(A) = |A \cap \mathbb{Z}|$ (тобто $\lambda(A)$ дорівнює кількості цілих точок в A). Тоді λ — міра на $2^{\mathbb{R}}$.

Властивості мір. Нехай λ — міра на півкільці $\mathcal{P}$.

1. $\lambda(\varnothing) = 0$. *Доведення.* Відомо, що $\varnothing \in \mathcal{P}$ (див. стор. 8). Візьмемо $A \in \mathcal{P}$, для якої $\lambda(A) < +\infty$ (така множина існує за нашим узгодженням). Використовуючи σ-адитивність λ, маємо

$$\lambda(A) = \lambda(A \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots) = \lambda(A) + \lambda(\varnothing) + \lambda(\varnothing) + \ldots,$$

і останній ряд збігається. Це можливо лише при $\lambda(\varnothing) = 0$. □

2. λ — скінченно-адитивна. *Доведення.* Для неперетинних $A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{P}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{P}$, із σ-адитивності маємо

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots\Big) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) + \lambda(\varnothing) + \lambda(\varnothing) + \cdots = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k). \qquad \Box$$

3. λ монотонна. *Доведення.* Якщо $A,\ B \in \mathcal{P},\ A \subset \mathcal{P}$, то $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, де C_k — неперетинні множини з $\mathcal{P}$. Використовуючи скінченну адитивність і невід'ємність λ, отримуємо

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \sum_{k=1}^{n} \lambda(C_k) \geq \lambda(A). \qquad \square$$

4. λ σ-півадитивна. *Доведення.* Візьмемо довільні $A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{P}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{P}$, і розглянемо неперетинні множини

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,\ n \geq 2.$$

Усі записані тут множини належать кільцю $k(\mathcal{P})$, тому є скінченними об'єднаннями елементів $\mathcal{P}$, отже ми маємо

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in}, \quad A_n \setminus B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} D_{jn}, \quad C_{in},\ D_{jn} \in \mathcal{P},$$

де множини в об'єднаннях не перетинаються. Звідси

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in}\Big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) + \sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn})\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \quad \square$$

5. Нехай $A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{P},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тоді

$$\lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Доведення. Маємо, що

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap A_k), \quad A \cap A_k \in \mathcal{P}.$$

Згідно із властивостями σ-півадитивності і монотонності λ дістанемо

$$\lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k). \qquad \square$$

Зауваження 2.1. Нехай λ — невід'ємна *скінченно-адитивна* функція множин на $\mathcal{P}$. Тоді легко бачити, що властивості 1 і 3 залишаються справедливими без змін, а властивості 4 і 5 справджуються для *скінченних* наборів $A_1, \ldots, A_n$.

Нагадаємо, що для монотонної послідовності множин $A_n,\ n \geq 1$, ми визначили $\lim_{n\to\infty} A_n$ (див. (1.2) і (1.3)). Наступні твердження дають умови виконання рівності

$$\lambda\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \lambda\big(A_n\big),$$

тобто умови неперервності міри.

Теорема 2.1 (теорема про неперервність міри знизу). *Нехай λ — міра на кільці $\mathcal{K}$,*

$$A_n \in \mathcal{K},\ n \geq 1, \quad A_n \uparrow, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

Тоді

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda\big(A_n\big).$$

Доведення. Покладемо

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1},\ n \geq 2,$$

тоді $B_n \in \mathcal{K}$, неперетинні, і

$$\bigcup_{n=1}^{j} B_n = A_j, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Маємо

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \lambda(B_n) = \lim_{j\to\infty} \lambda(A_j). \quad \square$$

Теорема 2.2 (теорема про неперервність міри зверху). *Нехай λ — міра на кільці $\mathcal{K}$,*

$$A_n \in \mathcal{K},\ n \geq 1, \quad A_n \downarrow, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}, \quad \lambda(A_1) < +\infty.$$

Тоді

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda\big(A_n\big).$$

Доведення. Розглянемо множини $C_n = A_1 \setminus A_n,\ n \geq 1$. Тоді

$$C_n \uparrow \Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big),$$

і з попередньої теореми одержимо

$$\lambda\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda(A_1) - \lambda(A_n)\big) = \lambda(A_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Урахувавши, що

$$\lambda\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lambda(A_1) - \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big),$$

отримаємо твердження нашої теореми. Оскільки $\lambda(A_1) < +\infty$, записані тут значення міри є скінченними, і тому всі різниці коректно визначені. □

Приклад 2.3. Розглянемо міру з прикладу 2.2 $\lambda(A) = |A \cap \mathbb{Z}|,\ A \subset \mathbb{R}$. Візьмемо $A_n = [n, +\infty)$. Тоді

$$A_n \downarrow \varnothing, \quad \lambda(A_n) = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = +\infty \neq \lambda(\varnothing).$$

Таким чином, умову $\lambda(A_1) < +\infty$ в останній теоремі відкинути не можна.

2.2. Приклади мір

Розглянемо деякі важливі й нетривіальні приклади σ-адитивних функцій множин.

Коротко нагадаємо означення *міри Жордана* m (докладніше див., наприклад, § 14.2 [7]). Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — обмежена множина. Візьмемо деяке $n \geq 0$ і в $\mathbb{R}^d$ розглянемо всі бруси вигляду

$$\prod_{i=1}^{d} \big[k_i 2^{-n}, (k_i+1)2^{-n}\big], \quad k_i \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Значення міри кожного такого бруса покладемо рівним 2^{-nd}, міру об'єднання брусів без спільних внутрішніх точок вважаємо рівною сумі відповідних мір. Нехай $A_{(n)}$ — об'єднання всіх брусів, що є підмножинами A, $A^{(n)}$ — об'єднання всіх брусів, що мають хоча б одну спільну точку з A. Якщо

$$\sup_{n\geq 0} \mathsf{m}\big(A_{(n)}\big) = \inf_{n\geq 0} \mathsf{m}\big(A^{(n)}\big),$$

то множина A називається вимірною за Жорданом, і $\mathsf{m}(A)$ покладається рівною цьому спільному значенню супремуму і інфімуму.

У математичному аналізі доводиться, що об'єднання і різниця двох множин, вимірних за Жорданом, також вимірні за Жорданом, тобто клас цих множин утворює кільце. Позначимо це кільце через $\mathcal{K}_{\mathsf{m}}$. Також відомо, що m скінченно-адитивна на $\mathcal{K}_{\mathsf{m}}$. Далі ми доведемо, що m є мірою в нашому сенсі. Почнемо з допоміжного твердження.

Лема 2.1. *Для будь-яких $A \in \mathcal{K}_{\mathsf{m}}$ і $\varepsilon > 0$ знайдуться замкнена множина $F_\varepsilon \in \mathcal{K}_{\mathsf{m}}$ і відкрита множина $U_\varepsilon \in \mathcal{K}_{\mathsf{m}}$ такі, що*

$$F_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon, \quad \mathsf{m}(A) - \mathsf{m}\big(F_\varepsilon\big) < \varepsilon, \quad \mathsf{m}\big(U_\varepsilon\big) - \mathsf{m}(A) < \varepsilon.$$

Доведення. За означенням міри Жордана, знайдеться таке n_0, що

$$\mathsf{m}(A) - \mathsf{m}\big(A_{(n_0)}\big) < \varepsilon.$$

Тоді для множини $F_\varepsilon = A_{(n_0)}$ справджується твердження леми.

Також знайдеться n_1 таке, що

$$\mathsf{m}\big(A^{(n_1)}\big) - \mathsf{m}(A) < \varepsilon/2. \tag{2.2}$$

Множина $A^{(n_1)}$ — це скінченне об'єднання брусів вигляду (2.1) із $n = n_1$, $A \subset A^{(n_1)}$. Для $\delta > 0$ кожен із цих брусів замінимо на відкритий більший брус

$$\prod_{i=1}^{d} \big(k_i 2^{-n_1} - \delta, (k_i+1)2^{-n_1} + \delta\big)$$

і позначимо через $A^{(n_1)}(\delta)$ об'єднання цих відкритих брусів. Тоді

$$A^{(n_1)} \subset A^{(n_1)}(\delta) \ \Rightarrow\ \mathsf{m}\big(A^{(n_1)}\big) \le \mathsf{m}\big(A^{(n_1)}(\delta)\big),$$
$$\mathsf{m}\big(A^{(n_1)}(\delta)\big) \le \sum \mathsf{m}\Big(\prod_{i=1}^{d} \big(k_i 2^{-n_1} - \delta, (k_i+1)2^{-n_1} + \delta\big)\Big) \to$$
$$\to \sum \mathsf{m}\Big(\prod_{i=1}^{d} \big[k_i 2^{-n_1}, (k_i+1)2^{-n_1}\big]\Big) = \mathsf{m}\big(A^{(n_1)}\big),\ \delta \to 0$$

(суми тут взято по всіх брусах, що входять в $A^{(n_1)}$). Тому

$$\mathsf{m}\big(A^{(n_1)}(\delta)\big) \to \mathsf{m}\big(A^{(n_1)}\big),\ \delta \to 0.$$

Ми можемо вибрати $\delta_1 > 0$ таке, що

$$\mathsf{m}\big(A^{(n_1)}(\delta_1)\big) - \mathsf{m}\big(A^{(n_1)}\big) < \varepsilon/2, \tag{2.3}$$

і покласти $U_\varepsilon = A^{(n_1)}(\delta_1)$. Із (2.2) і (2.3) випливає, що для цієї множини справджується потрібне твердження. $\square$

Теорема 2.3. *Міра Жордана* m *є мірою на кільці* $\mathcal{K}_\mathsf{m}$ *у сенсі нашого означення (тобто невід'ємною* σ*-адитивною функцією множин).*

Доведення. Достатньо довести σ-адитивність m на $\mathcal{K}_\mathsf{m}$. Нехай

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A,\ A_n \in \mathcal{K}_\mathsf{m}, \quad \text{тут } A_n \text{ неперетинні.}$$

Нагадаємо, що m є невід'ємною і скінченно-адитивною, тому є монотонною (див. зауваження 2.1), і для будь-якого $j \geq 1$ ми маємо

$$A \supset \bigcup_{n=1}^{j} A_n, \quad \mathsf{m}(A) \geq \mathsf{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{j} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{j} \mathsf{m}(A_n).$$

Взявши границю при $j \to \infty$, одержимо

$$\mathsf{m}(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{m}(A_n). \tag{2.4}$$

Далі ми отримаємо оцінку в інший бік. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$, і користуючись лемою 2.1, виберемо множини $F_\varepsilon,\ U_{\varepsilon/2^n} \in \mathcal{K}_\mathsf{m},\ n \geq 1$, такі, що

$$F_\varepsilon \text{ замкнена}, \quad F_\varepsilon \subset A, \quad \mathsf{m}(A) - \mathsf{m}\big(F_\varepsilon\big) < \varepsilon, \tag{2.5}$$

$$U_{\varepsilon/2^n} \text{ відкриті}, \quad A \subset U_{\varepsilon/2^n}, \quad \mathsf{m}\big(U_{\varepsilon/2^n}\big) - \mathsf{m}(A) < \varepsilon/2^n. \tag{2.6}$$

Маємо, що

$$F_\varepsilon \subset A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\varepsilon/2^n}. \tag{2.7}$$

Множина $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ замкнена й обмежена, тому є компактною, і (2.7) дає покриття цього компакта відкритими множинами. Як відомо, із відкритого покриття компакта можна виділити скінченне підпокриття, і для деякого $j \geq 1$ дістанемо

$$F_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{j} U_{\varepsilon/2^n}.$$

Ураховуючи властивість міри 5 та зауваження 2.1, маємо

$$\mathsf{m}(A) - \varepsilon \overset{(2.5)}{<} \mathsf{m}\big(F_\varepsilon\big) \overset{\text{власт. 5}}{\leq} \sum_{n=1}^{j} \mathsf{m}\big(U_{\varepsilon/2^n}\big) \overset{(2.6)}{<}$$

$$\overset{(2.6)}{<} \sum_{n=1}^{j} \big(\mathsf{m}\big(A_n\big) + \varepsilon/2^n\big) < \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{m}\big(A_n\big) + \varepsilon.$$

Спрямуємо тут $\varepsilon \to 0+$, і отримаємо

$$\mathsf{m}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{m}\big(A_n\big) \overset{(2.4)}{\Longrightarrow} \mathsf{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{m}\big(A_n\big). \qquad \square$$

Наслідок 2.1. *На півкільці*

$$\mathcal{P}_d = \Big\{ \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \;\Big|\; a_k, b_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

визначимо функцію множин

$$\lambda_d\Big(\prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \Big) := \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k)\,.$$

Тоді λ_d є мірою на $\mathcal{P}_d$.

Доведення. Відомо, що множини з $\mathcal{P}_d$ вимірні за Жорданом, і для $A \in \mathcal{P}_d$ виконується $\lambda_d(A) = \mathsf{m}(A)$. Оскільки m σ-адитивна на множинах із $\mathcal{K}_{\mathsf{m}}$, то вона буде σ-адитивною і на множинах з $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{K}_{\mathsf{m}}$. $\square$

Твердження наслідку 2.1 можна довести і безпосередньо, без використання поняття міри Жордана, міркуючи у випадку множин із $\mathcal{P}_d$ аналогічно доведенню теореми 2.3.

Теорема 2.4. *Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неспадна неперервна справа функція. На півкільці*

$$\mathcal{P}_1 = \big\{ (a, b] \;\big|\; a,\ b \in \mathbb{R} \big\}$$

визначимо функцію множин

$$\lambda_F\left((a, b]\right) := F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

Тоді λ_F є мірою на $\mathcal{P}_1$.

Доведення. Оскільки функція F неспадна, то λ_F є невід'ємною.

Відмітимо, що λ_F скінченно-адитивна на $\mathcal{P}_1$. Нехай

$$(a,b] = \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b_n], \quad (a_n, b_n] \text{ неперетинні.}$$

Пронумеруємо ці відрізки зліва направо так, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_j$, і матимемо

$$\begin{gathered} a = a_1,\ b_1 = a_2,\ b_2 = a_3,\ \ldots,\ b_{j-1} = a_j,\ b_j = b, \\ \sum_{n=1}^{j} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big) = \sum_{n=1}^{j} \big(F(b_n) - F(a_n)\big) = \\ = F(b_j) - F(a_1) = F(b) - F(a) = \lambda_F\big((a,b]\big). \end{gathered}$$

Ще потрібно довести σ-адитивність λ_F. Тепер нехай

$$(a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n], \quad (a_n, b_n] \text{ неперетинні.}$$

Оскільки λ_F невід'ємна й адитивна, вона монотонна, і для всіх $j \geq 1$ маємо $(a,b] \supset \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b_n]$. Усі ці множини належать породженому кільцю $k(\mathcal{P}_1)$,

$$(a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b_n] \in k(\mathcal{P}_1) \overset{(1.5)}{\Longrightarrow} (a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b_n] = \bigcup_{i=1}^{r} (c_i, d_i],$$

$$(a,b] = \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b_n] \bigcup \bigcup_{i=1}^{r} (c_i, d_i],$$

$$\lambda_F\big((a,b]\big) = \sum_{n=1}^{j} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_F\big((c_i, d_i]\big) \geq \sum_{n=1}^{j} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big). \quad (2.8)$$

Взявши границю при $j \to \infty$, отримаємо

$$\lambda_F\big((a,b]\big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big). \quad (2.9)$$

Далі ми дістанемо оцінку в інший бік. Для деякого $\varepsilon > 0$, використовуючи неперервність F справа, візьмемо

$$a' > a: \quad F(a') - F(a) < \varepsilon, \quad (2.10)$$

$$b'_n > b_n: \quad F(b'_n) - F(b_n) < \varepsilon/2^n, \quad n \geq 1. \quad (2.11)$$

Тоді

$$[a', b] \subset (a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n).$$

Тут із покриття компакта відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, і тому для деякого $j \geq 1$ ми отримаємо

$$[a', b] \subset \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b'_n) \quad \Rightarrow \quad (a', b] \subset \bigcup_{n=1}^{j} (a_n, b'_n].$$

Згідно із властивістю міри 5 і зауваженням 2.1 одержимо

$$\lambda_F\big((a', b]\big) \leq \sum_{n=1}^{j} \lambda_F\big((a_n, b'_n]\big). \tag{2.12}$$

Також

$$\lambda_F\big((a, b]\big) - \lambda_F\big((a', b]\big) = F(a') - F(a) \overset{(2.10)}{<} \varepsilon,$$

$$\lambda_F\big((a_n, b'_n]\big) - \lambda_F\big((a_n, b_n]\big) = F(b'_n) - F(b_n) \overset{(2.11)}{<} \varepsilon/2^n.$$

Звідси і з (2.12) маємо

$$\lambda_F\big((a, b]\big) - \varepsilon < \sum_{n=1}^{j} \big(\lambda_F\big((a_n, b_n]\big) + \varepsilon/2^n\big) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big) + \varepsilon\,.$$

При $\varepsilon \to 0+$ отримуємо

$$\lambda_F\big((a, b]\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big) \overset{(2.9)}{\Rightarrow} \lambda_F\big((a, b]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F\big((a_n, b_n]\big). \qquad \square$$

Ми бачимо, що доведення теорем 2.3 і 2.4 схожі, в обох використовується адитивність даної функції множин та існування скінченного відкритого підпокриття компакта. Ці теореми є частинними випадками одного загального твердження. Наведемо його.

Набір множин $\mathcal{H} \subset 2^{\mathsf{X}}$ називається *компактним класом*, якщо для будь-якої послідовності $A_n \in \mathcal{H}$ з $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ існує таке j, що $\bigcap_{n=1}^{j} A_n = \varnothing$. Прикладом такого класу може бути набір компактних підмножин $\mathbb{R}^d$.

Нехай λ — скінченна невід'ємна адитивна функція множин на алгебрі $\mathcal{A}$. Припустимо, що існує компактний клас $\mathcal{H}$, що наближає $\mathcal{A}$ в такому сенсі:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ A \in \mathcal{A}\ \exists\, K_\varepsilon \in \mathcal{H},\ A_\varepsilon \in \mathcal{A}:\ A_\varepsilon \subset K_\varepsilon \subset A,\ \lambda\big(A \setminus A_\varepsilon\big) < \varepsilon.$$

Тоді λ σ-адитивна на $\mathcal{A}$.

Доведення цього твердження міститься, наприклад, у підрозділі 1.4 [3].

У цьому підрозділі ми навели деякі приклади мір на півкільцях і кільцях. Наша подальша мета — показати, як множину визначення міри можна поширити на σ-алгебру.

Означення 2.3. Нехай $\mathcal{H}$, $\tilde{\mathcal{H}} \subset 2^{\mathsf{X}}$, $\lambda : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$, $\tilde{\lambda} : \tilde{\mathcal{H}} \to (-\infty, +\infty]$. Функція множин $\tilde{\lambda}$ називається продовженням функції множин λ, якщо

$$\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}, \quad \forall\, A \in \mathcal{H} : \ \lambda(A) = \tilde{\lambda}(A).$$

При цьому λ називається звуженням $\tilde{\lambda}$.

Приклад 2.4. Міра Жордана m, розглянута в теоремі 2.3, є продовженням міри λ_d, визначеної в наслідку 2.1.

Зауваження 2.2. Якщо $\mathcal{H}$ і $\tilde{\mathcal{H}}$ — півкільця, $\tilde{\lambda}$ — міра на $\tilde{\mathcal{H}}$, то, очевидно, λ є мірою на $\mathcal{H}$.

2.3. Зовнішні міри

У конструкції продовження міри на σ-алгебру важливу роль відіграє таке поняття.

Означення 2.4. Функція множин $\lambda^* : 2^{\mathsf{X}} \to [0, +\infty]$ називається *зовнішньою мірою*, якщо

1) $\lambda^*(\varnothing) = 0$,

2) для будь-яких $A,\ A_n \subset \mathsf{X},\ n \geq 1,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, виконується

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)\,. \tag{2.13}$$

Приклад 2.5. Будь-яка міра, визначена на 2^{X}, є зовнішньою мірою. Умови 1) та 2) означення 2.4 — це властивості міри 1 і 5 (див. підрозділ 2.1).

Приклад 2.6. Покладемо $\lambda^*(\varnothing) = 0$, а для всіх $A \neq \varnothing$ візьмемо $\lambda^*(A) = 1$. Тоді λ^* — зовнішня міра (і при цьому не є мірою).

Властивості зовнішніх мір. Нехай λ^* — зовнішня міра.

1. Для $A,\ A_n \subset \mathsf{X},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{j} A_n$, виконується $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{j} \lambda^*(A_n)$. *Доведення*. В умові 2) означення зовнішньої міри покладемо $A_{j+1} = A_{j+2} = \ldots = \varnothing$, і скористаємося тим, що $\lambda^*(\varnothing) = 0$. □

2. λ^* монотонна. *Доведення*. Випливає з властивості 1 при $j = 1$. □

Особливе значення для побудови продовження міри матиме зовнішня міра із наступного означення.

Означення 2.5. Нехай λ — міра на півкільці $\mathcal{P}$. *Зовнішньою мірою, породженою мірою* λ, називається функція множин λ^*, визначена за правилом:

$$1)\quad \lambda^*(A) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)\,\Big|\, A_n \in \mathcal{P},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big\}, \tag{2.14}$$

якщо існує хоча б одне зліченне покриття множини A елементами $\mathcal{P}$;

2) $\lambda^*(A) := +\infty$ в іншому випадку.

Теорема 2.5. *Функція множин* λ^**, визначена в означенні 2.5, є зовнішньою мірою.*

Доведення. Очевидно, що λ^* визначена на всіх підмножинах X і набуває невід'ємних значень.

За властивістю півкілець, $\varnothing \in \mathcal{P}$, використовуючи покриття $\varnothing \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing$, отримаємо

$$\lambda^*(\varnothing) \overset{(2.14)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\varnothing) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^*(\varnothing) = 0.$$

Залишилося перевірити умову 2) означення 2.4. Нехай $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Якщо хоча б одне значення $\lambda^*(A_n) = +\infty$, то (2.13), очевидно, справджується. Припустимо, що всі $\lambda^*(A_n) < +\infty$, і візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді $\lambda^*(A_n)$ визначаються за (2.14), і для кожного $n \geq 1$ знайдуться множини $B_{kn} \in \mathcal{P}$ такі, що

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\big(B_{kn}\big) < \lambda^*\big(A_n\big) + \varepsilon/2^n. \tag{2.15}$$

Маємо

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}, \quad B_{kn} \in \mathcal{P} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda^*(A) \overset{(2.14)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\big(B_{kn}\big) \overset{(2.15)}{<} \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*\big(A_n\big) + \varepsilon.$$

Спрямувавши $\varepsilon \to 0+$, отримаємо (2.13). □

Зауваження 2.3. Якщо у (2.14) обмежимося наборами неперетинних множин із півкільця, об'єднання яких містить A, то при цьому значення λ^* не зміниться. Розглянемо

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad B_n \in k(\mathcal{P}) \Rightarrow B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_i^{(n)},$$

де $C_i^{(n)} \in \mathcal{P}$ неперетинні. Набір множин

$$\left\{C_i^{(n)},\ 1 \le i \le i_n,\ n \ge 1\right\}$$

візьмемо замість $\left\{A_n,\ n \ge 1\right\}$. Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} C_i^{(n)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \supset B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_i^{(n)} \overset{(*)}{\Rightarrow} \lambda(A_n) \ge \sum_{i=1}^{i_n} \lambda\big(C_i^{(n)}\big),$$

інфімум у (2.14) не збільшиться (слідування (*) можна легко обґрунтувати, аналогічно (2.8)). Також цей інфімум не зменшиться, оскільки ми звужуємо множину наборів множин.

2.4. Теорема Каратеодорі. Повні міри

Означення 2.6. Множина A називається *вимірною за Каратеодорі* відносно зовнішньої міри λ^*, якщо для будь-якої множини $E \subset \mathsf{X}$

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*\left(E \cap \overline{A}\right) . \tag{2.16}$$

Рівність (2.16) можна записувати у вигляді

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A) .$$

Сенс означення полягає в тому, що ця множина A дає розбиття будь-якої множини $E \subset \mathsf{X}$ на дві частини, де λ^* адитивна.

Зауваження 2.4. Для вимірності A відносно λ^* достатньо, щоб для будь-якої множини $E \subset \mathsf{X}$ виконувалося

$$\lambda^*(E) \ge \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*\left(E \cap \overline{A}\right) . \tag{2.17}$$

Адже протилежна нерівність

$$\lambda^*(E) \le \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*\left(E \cap \overline{A}\right), \quad A,\ E \subset \mathsf{X},$$

випливає із включення $E \subset (E \cap A) \cup \left(E \cap \overline{A}\right)$ та першої властивості зовнішніх мір.

Із першого погляду, вимірність за Каратеодорі не пов'язана з визначенням σ-адитивної функції множин, але наведена нижче теорема вказує на такий зв'язок.

Теорема 2.6 (теорема Каратеодорі). *Нехай λ^* — довільна зовнішня міра, $\mathcal{S}$ — клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно λ^*. Тоді $\mathcal{S}$ є σ-алгеброю і звуження λ^* на $\mathcal{S}$ є мірою.*

Доведення. **Крок 1.** $\mathcal{S}$ **– алгебра.** Підстановка $E = \mathsf{X}$ до (2.16) показує, що $\mathsf{X} \in \mathcal{S}$.

Нехай $A \in \mathcal{S}$. Тоді безпосередньо з означення отримуємо, що $\overline{A} \in \mathcal{S}$.

Нехай також $B \in \mathcal{S}$, і покажемо вимірність об'єднання $A \cup B$. Маємо

$$\begin{aligned} \lambda^* (E) &\overset{A\in\mathcal{S}}{=} \lambda^* (E \cap A) + \lambda^* \left(E \cap \overline{A}\right) \overset{B\in\mathcal{S}}{=} \\ &\overset{B\in\mathcal{S}}{=} \lambda^* (E \cap A) + \lambda^* \left(E \cap \overline{A} \cap B\right) + \lambda^* \left(E \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Також отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda^*\big(E \cap (A \cup B)\big) &\overset{A\in\mathcal{S}}{=} \lambda^*\big(E \cap (A \cup B) \cap A\big) + \lambda^*\Big(E \cap \big(A \cup B\big) \cap \overline{A}\Big) = \\ &= \lambda^*\big(E \cap A\big) + \lambda^*\Big(E \cap B \cap \overline{A}\Big) \overset{(2.18)}{=} \lambda^*(E) - \lambda^*\Big(E \cap \overline{A} \cap \overline{B}\Big) = \\ &= \lambda^*(E) - \lambda^*\Big(E \cap \overline{\big(A \cup B\big)}\Big) . \end{aligned}$$

Отже, $A \cup B$ задовольняє означення вимірності.

Оскільки доповнення та об'єднання множин з $\mathcal{S}$ будуть вимірними множинами маємо, що $A \setminus B = \overline{\overline{A} \cup B} \in \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{S}$ є алгеброю.

Крок 2. $\mathcal{S}$ **–** σ**-алгебра.** Спочатку розглянемо неперетинні $A_k \in \mathcal{S}$, $k \geq 1$. Доведемо за індукцією, що для довільних $E \subset \mathsf{X}$ та $n \geq 1$ справедлива рівність

$$\lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^*\big(E \cap A_k\big) .$$

При $n = 1$ рівність є очевидною, а перехід від n до $n+1$ отримуємо таким чином:

$$\begin{aligned} &\lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \overset{A_{n+1}\in\ \mathcal{S}}{=} \\ &\overset{A_{n+1}\in\ \mathcal{S}}{=} \lambda^*\Big(E \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \cap A_{n+1}\Big) + \lambda^*\Big(E \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) \cap \overline{A}_{n+1}\Big) = \\ &= \lambda^*\big(E \cap A_{n+1}\big) + \lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \lambda^*\big(E \cap A_{n+1}\big) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^*\big(E \cap A_k\big), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести (у перетвореннях ми використали неперетинність A_k і наше твердження для n доданків).

Тепер покажемо, що $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$. Використовуючи доведене вище твердження та монотонність λ^*, для будь-яких $E \subset X$ і $n \geq 1$ маємо

$$\lambda^*(E) \overset{\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + \lambda^*\Big(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \lambda^*\big(E \cap A_k\big) + \lambda^*\Big(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\Big).$$

В отриманій нерівності візьмемо $n \to \infty$, використаємо (2.13) і отримаємо

$$\lambda^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*\big(E \cap A_k\big) + \lambda^*\Big(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\Big) \geq$$

$$\geq \lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) + \lambda^*\Big(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\Big). \quad (2.19)$$

Тому для $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ справджується (2.17), і ця множина є вимірною.

Візьмемо $B_k \in \mathcal{S},\ k \geq 1$, що можуть перетинатися. Усі множини

$$A_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$$

вимірні (оскільки $\mathcal{S}$ є алгеброю) і неперетинні, тому

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}.$$

Значить, $\mathcal{S}$ — σ-алгебра

Крок 3. Звуження λ^* на $\mathcal{S}$ є мірою. Знову розглянемо неперетинні $A_k \in \mathcal{S},\ k \geq 1$, візьмемо в (2.19) $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$, і отримаємо

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*\big(A_k\big).$$

Нерівність у протилежний бік випливає з (2.13) для $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Таким чином, ми отримуємо рівність, і λ^* є σ-адитивною на $\mathcal{S}$. $\square$

Визначена в теоремі Каратеодорі міра має важливу властивість — є повною.

Означення 2.7. Міра λ на σ-алгебрі $\mathcal{F}$ називається *повною*, якщо

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \lambda(A) = 0,\ \forall B \subset A:\ B \in \mathcal{F}.$$

Із монотонності міри випливає, що тоді $\lambda(B) = 0$.

Інколи говорять, що σ-алгебра $\mathcal{F}$ є повною відносно міри λ. Повнота фактично є властивістю пари об'єктів λ та $\mathcal{F}$.

Наслідок 2.2. *Визначена в теоремі Каратеодорі міра λ^* на $\mathcal{S}$ є повною.*

Доведення. Нехай $\lambda^*(A) = 0,\ B \subset A,\ E \subset \mathsf{X}$. Тоді, зокрема, буде $E \cap B \subset A$, $\lambda^*(E \cap B) = 0$, і ми маємо

$$\lambda^*(E \cap B) + \lambda^*\left(E \cap \overline{B}\right) = \lambda^*\left(E \cap \overline{B}\right) \leq \lambda^*(E),$$

що, згідно із зауваженням 2.4, доводить вимірність B. □

2.5. Продовження міри з півкільця на породжене σ-кільце

Визначена в теоремі Каратеодорі σ-алгебра $\mathcal{S}$ може виявитися тривіальною.

Приклад 2.7. Розглянемо зовнішню міру λ^* з прикладу 2.6 ($\lambda^*(A) = 1$ для всіх $A \neq \varnothing$). Неважко переконатися, що тоді клас λ^*-вимірних множин $\mathcal{S} = \{\varnothing, \mathsf{X}\}$.

Наступне твердження показує, що набір вимірних множин буде достатньо багатим, якщо λ^* визначена за деякою мірою.

Теорема 2.7 (**теорема про вимірність елементів вихідного півкільця**). *Нехай λ — міра на півкільці $\mathcal{P}$, зовнішня міра λ^* породжена мірою λ, $\mathcal{S}$ — клас всіх λ^*-вимірних множин. Тоді $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ і звуження λ^* на $\mathcal{P}$ збігається з λ.*

Доведення. **Крок 1.** $\lambda^*(A) = \lambda(A),\ A \in \mathcal{P}$. Використовуючи покриття $A \subset (A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots)$, отримаємо

$$\lambda^*(A) \overset{(2.14)}{\leq} \lambda(A) + \lambda(\varnothing) + \lambda(\varnothing) + \ldots = \lambda(A).$$

З іншого боку, якщо $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{P}$, то за властивістю 5 міри

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(A_n\big) \ \Rightarrow\ \lambda(A) \leq \lambda^*(A),$$

адже, за (2.14), $\lambda^*(A)$ є інфімумом указаних сум. Із двох отриманих нерівностей випливає, що $\lambda = \lambda^*$ на $\mathcal{P}$.

Крок 2. $A \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{S}$. Перевіримо, що $A \in \mathcal{P}$ задовольняє умову вимірності (2.17), тобто

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*\big(E \setminus A\big), \quad E \subset \mathsf{X}. \tag{2.20}$$

Достатньо розглянути випадок $\lambda^*(E) < +\infty$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. За означенням 2.5 породженої зовнішньої міри, існують $A_n \in \mathcal{P}$ такі, що

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \lambda^*(E) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Оскільки $\mathcal{P}$ — півкільце, то $A_n \backslash A = \bigcup_{i=1}^{j_n} B_{in}$, $B_{in} \in \mathcal{P}$ і в цьому об'єднанні неперетинні. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\lambda(A_n \cap A) + \sum_{i=1}^{j_n} \lambda\big(B_{in}\big) \Big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j_n} \lambda\big(B_{in}\big) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*\big(E \setminus A\big),$$

адже

$$\big(E \cap A\big) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cap A\big), \quad \big(E \setminus A\big) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{j_n} B_{in}.$$

Таким чином, для будь-яких $E \subset \mathsf{X}$ і $\varepsilon > 0$ справджується

$$\lambda^*(E) + \varepsilon > \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*\big(E \setminus A\big),$$

звідки при $\varepsilon \to 0+$ ми отримаємо (2.20). □

Згідно з теоремою 2.7, вказана λ^* буде продовженням λ з півкільця $\mathcal{P}$ на σ–алгебру $\mathcal{S}$.

Загальна схема продовження міри за Каратеодорі виглядає так. Початково міра λ визначається на півкільці $\mathcal{P}$. Означення 2.5 задає на 2^{X} зовнішню міру λ^* за значеннями λ, λ^* буде мірою на σ-алгебрі вимірних множин $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}$, при цьому $\lambda = \lambda^*$ на $\mathcal{P}$.

Отримане продовження міри λ з $\mathcal{P}$ на $\mathcal{S}$ також часто позначають через λ.

Однозначність продовження λ доведемо лише для σ-скінченних мір.

Теорема 2.8. *Нехай λ — σ-скінченна міра на півкільці $\mathcal{P}$, що породжує зовнішню міру λ^*, і $\mathcal{S}$ — клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно λ^*. Якщо $\tilde{\lambda}$ — довільне продовження λ на $\mathcal{S}$, то*

$$\forall\, A \in \mathcal{S}: \; \tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A).$$

Доведення. **Крок 1.** Спочатку припустимо, що $\mathsf{X} \in \mathcal{P}$ і $\lambda(\mathsf{X}) < \infty$. Для $A \in \mathcal{S}$ візьмемо довільні $A_n \in \mathcal{P},\ n \geq 1$, такі, що $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (вони існують, наприклад, із $A_1 = \mathsf{X}$). Тоді, за відповідною властивістю міри,

$$\tilde{\lambda}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(A_n) \overset{A_n \in \mathcal{P}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\,.$$

З означення 2.5 породженої зовнішньої міри отримуємо, що $\tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(A)$. Повторивши аналогічні міркування для $\big(\mathsf{X} \setminus A\big) \in \mathcal{S}$, отримаємо

$$\tilde{\lambda}\big(\mathsf{X} \setminus A\big) \leq \lambda^*\big(\mathsf{X} \setminus A\big) \ \Rightarrow \tilde{\lambda}(\mathsf{X}) - \tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(\mathsf{X}) - \lambda^*(A) \Rightarrow \tilde{\lambda}(A) \geq \lambda^*(A).$$

(ми використали такі властивості: $\tilde{\lambda}(\mathsf{X}) = \lambda^*(\mathsf{X}) = \lambda(\mathsf{X}) < +\infty$). Із двох протилежних нерівностей маємо, що $\tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A)$.

Крок 2. Тепер розглянемо загальний випадок у твердженні. Оскільки λ є σ-скінченною, то

$$\exists\, \mathsf{X}_n \in \mathcal{P},\ n \geq 1 :\ \mathsf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n,\ \lambda\big(\mathsf{X}_n\big) < +\infty.$$

Перейдемо в об'єднанні до неперетинних множин із $\mathcal{P}$. Для цього візьмемо

$$\mathsf{Y}_1 = \mathsf{X}_1, \quad \mathsf{Y}_n = \mathsf{X}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathsf{X}_k,\ n \geq 2,$$

$$\mathsf{X}_n \in k(\mathcal{P}) \Rightarrow \mathsf{Y}_n \in k(\mathcal{P}) \overset{(1.5)}{\Rightarrow} \mathsf{Y}_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} \mathsf{Z}_{kn},\ \mathsf{Z}_{kn} \in \mathcal{P} \text{ неперетинні},$$

і маємо $\mathsf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} \mathsf{Z}_{kn}$. Використовуючи крок 1 та σ-адитивність $\tilde{\lambda}$ і λ^*, для $A \in \mathcal{S}$ отримуємо

$$\tilde{\lambda}\big(A \cap \mathsf{Z}_{kn}\big) = \lambda^*\big(A \cap \mathsf{Z}_{kn}\big) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \tilde{\lambda}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tilde{\lambda}\big(A \cap \mathsf{Z}_{kn}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \lambda^*\big(A \cap \mathsf{Z}_{kn}\big) = \lambda^*(A). \quad \square$$

Наслідок 2.3. *Нехай λ — σ-скінченна міра на півкільці $\mathcal{P}$, міри $\tilde{\lambda}_1$ і $\tilde{\lambda}_2$ — два її продовження на $\sigma k(\mathcal{P})$. Тоді*

$$\forall\, A \in \sigma k(\mathcal{P}) :\ \tilde{\lambda}_1(A) = \tilde{\lambda}_2(A).$$

Доведення. Маємо $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \ \Rightarrow\ \sigma k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}$. $\square$

Теорема 2.9 (**теорема про наближення міри її значеннями на кільці**). *Нехай міра* λ *— σ-скінченна міра на півкільці* $\mathcal{P}$*, довільним чином продовжена на σ-алгебру* $\mathcal{S}$ *множин, вимірних за Каратеодорі відносно породженої* λ^**. Тоді*

$$\forall\, A \in \mathcal{S},\ \lambda(A) < +\infty\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in k(\mathcal{P}):\ \lambda\big(A\Delta B\big) < \varepsilon. \qquad (2.21)$$

Доведення. За теоремою 2.8, продовження λ з $\mathcal{P}$ на $\mathcal{S}$ визначається однозначно, і, зокрема, має збігатися з λ^*. Значить, $\lambda(A) = \lambda^*(A)$, і з (2.14) маємо

$$\exists\, A_n \in \mathcal{P},\ n \geq 1:\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \lambda(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тут у збіжному ряді виберемо таке $j \geq 1$, що

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

і покладемо $B = \bigcup_{n=1}^{j} A_n$. Тоді $B \in k(\mathcal{P})$ і

$$\lambda\big(A \setminus B\big) \leq \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus B\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=j+1}^{\infty} A_n \setminus B\Big) \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lambda\big(B \setminus A\big) \leq \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Звідси маємо $\lambda\big(A\Delta B\big) = \lambda\big(A \setminus B\big) + \lambda\big(B \setminus A\big) < \varepsilon$. □

Зауваження 2.5. Властивість (2.21) можна покласти в основу означення вимірності. Нехай скінченна міра λ задана на алгебрі $\mathcal{A}$, зовнішня міра λ^* породжена значеннями λ. Множина $A \subset \mathsf{X}$ називається вимірною, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{A}:\ \lambda^*\big(A\Delta B\big) < \varepsilon.$$

Можна довести, що клас цих вимірних множин є σ-алгеброю і збігається з класом $\mathcal{S}$ множин, вимірних за Каратеодорі. Побудову продовження міри, що спирається на це означення вимірності, наведено, наприклад, у [3], [4], [9], [10].

2.6. Міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Міра Лебега–Стілтьєса в $\mathbb{R}$

Візьмемо універсальну множину $\mathsf{X} = \mathbb{R}^d$. На класі підмножин

$$\mathcal{P}_d = \Big\{ \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \ \Big|\ a_k, b_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

визначимо функцію

$$\lambda_d \Big(\prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \Big) := \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) .$$

Тоді λ_d є мірою на півкільці $\mathcal{P}_d$ (див. наслідок 2.1), за λ_d визначимо зовнішню міру λ_d^*. Через $\mathcal{S}_d$ позначимо клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно λ_d^*.

Тоді множини з $\mathcal{S}_d$ називаються *вимірними за Лебегом* в $\mathbb{R}^d$, звуження λ_d^* на $\mathcal{S}_d$ називається *мірою Лебега* в $\mathbb{R}^d$. Міру Лебега на $\mathcal{S}_d$ також позначатимемо через λ_d.

Із підрозділу 2.5 маємо, що $\mathcal{S}_d$ є σ-алгеброю, що містить $\mathcal{P}_d$, тому

$$\mathcal{S}_d \supset \sigma a (\mathcal{P}_d) = \mathcal{B} \left(\mathbb{R}^d \right) .$$

Значить, кожна борельова множина є вимірною за Лебегом.

Із наслідку 2.2 випливає, що λ_d на $\mathcal{S}_d$ — повна міра (відмітимо, що звуження λ_d на $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ вже повною мірою не буде).

Зауваження 2.6. Міра Лебега інваріантна відносно зсувів, тобто

$$\forall A \in \mathcal{S}_d,\ c \in \mathbb{R}^d :\ A + c := \big\{ x + c \,\big|\, x \in A \big\} \in \mathcal{S}_d,\ \lambda_d(A + c) = \lambda_d(A).$$

Адже при зсувах зберігаються міри брусів з $\mathcal{P}_d$, тому не змінюються значення зовнішніх мір, $\lambda_d^*(E + c) = \lambda_d^*(E)$, $E \subset \mathbb{R}^d$. З означення вимірності за Каратеодорі легко отримується, що

$$A + c \text{ вимірна відносно } \lambda_d^* \ \Leftrightarrow\ A \text{ вимірна відносно } \lambda_d^*,$$

і при цьому $\lambda_d^*(A + c) = \lambda_d^*(A)$.

Використовуючи теореми про неперервність міри, σ-адитивність міри і те, що $\lambda_1 ((a, b]) = b - a$, ми знайдемо **значення міри Лебега деяких підмножин $\mathbb{R}$.**

1. Міра Лебега одноточкової множини дорівнює нулю. Маємо

$$\lambda_1 (\{b\}) = \lim_{n \to \infty} \lambda_1 \Big(\Big(b - \frac{1}{n}, b \Big] \Big) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Міра Лебега будь-якої скінченної або зліченної множини дорівнює нулю, оскільки це скінченна або зліченна сума мір одноточкових множин.

3. Міра Лебега кожного з інтервалів $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$ дорівнює $b-a$. Наприклад, маємо

$$\lambda_1\left([a,b]\right) = \lambda_1\left(\{a\}\right) + \lambda_1\left((a,b]\right) = 0 + (b-a) = b-a,$$

інші інтервали розглядаються аналогічно.

4. Міра Лебега всієї множини $\mathbb{R}$ дорівнює $+\infty$. Адже

$$\lambda_1\left(\mathbb{R}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda_1\left((-n,n]\right) = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty.$$

Наступне твердження покаже, що міра Лебега λ_d є продовженням міри Жордана m.

Теорема 2.10. *Нехай множина $A \subset \mathbb{R}^d$ вимірна за Жорданом. Тоді A вимірна за Лебегом, і значення мір Жордана і Лебега для неї збігаються.*

Доведення. За теоремою 2.3 m є мірою на кільці вимірних за Жорданом множин $\mathcal{K}_{\mathsf{m}}$. На множинах із $\mathcal{P}_d$ маємо

$$\lambda_d\Big(\prod_{k=1}^{d}(a_k,b_k]\Big) = \prod_{k=1}^{d}(b_k-a_k) = \mathsf{m}\Big(\prod_{k=1}^{d}(a_k,b_k]\Big).$$

З наслідку 2.3 випливає, що продовження λ_d і m збігаються на $\sigma k\big(\mathcal{P}_d\big)$, при цьому $\sigma k\big(\mathcal{P}_d\big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$ (теорема 1.6).

Користуючись лемою 2.1, для кожного $n \geq 1$ візьмемо замкнену множину $F_n \in \mathcal{K}_{\mathsf{m}}$ і відкриту множину $U_n \in \mathcal{K}_{\mathsf{m}}$ такі, що

$$F_n \subset A \subset U_n,\ \mathsf{m}(A) - \mathsf{m}\big(F_n\big) < \frac{1}{n},\ \mathsf{m}\big(U_n\big) - \mathsf{m}(A) < \frac{1}{n}. \tag{2.22}$$

Маємо, що F_n, $U_n \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$, тому

$$\mathsf{m}\big(F_n\big) = \lambda_d\big(F_n\big), \quad \mathsf{m}\big(U_n\big) = \lambda_d\big(U_n\big). \tag{2.23}$$

Для кожного $j \geq 1$

$$\lambda_d\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \leq \lambda_d\Big(U_j \setminus F_j\Big) =$$
$$= \lambda_d\big(U_j\big) - \lambda_d\big(F_j\big) \overset{(2.22),(2.23)}{<} \frac{2}{j} \ \Rightarrow\ \lambda_d\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = 0.$$

Оскільки міра λ_d повна на σ-алгебрі $\mathcal{S}_d$, то

$$\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \subset \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \;\Rightarrow\; \Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \in \mathcal{S}_d \Rightarrow\; A \in \mathcal{S}_d\,.$$

При цьому для кожного $j \geq 1$

$$F_j \subset A \subset U_j \;\Rightarrow\; \lambda_d\big(F_j\big) \leq \lambda_d\big(A\big) \leq \lambda_d\big(U_j\big) \overset{(2.23)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(2.23)}{\Longrightarrow} \mathsf{m}\big(F_j\big) \leq \lambda_d\big(A\big) \leq \mathsf{m}\big(U_j\big) \overset{(2.22)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(2.22)}{\Longrightarrow} \forall\, j \geq 1:\; \mathsf{m}\big(A\big) - \frac{1}{j} \leq \lambda_d\big(A\big) \leq \mathsf{m}\big(A\big) + \frac{1}{j} \overset{j\to\infty}{\Longrightarrow} \lambda_d\big(A\big) = \mathsf{m}\big(A\big)\,. \quad \square$$

Приклад 2.8 (**підмножина $\mathbb{R}$, що не є вимірною за Лебегом**). Існування невимірної множини покажемо у припущенні, що справджується аксіома вибору.

Для чисел відрізка $[0,1]$ уведемо відношення еквівалентності так:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Це відношення дає розбиття на класи еквівалентності $[0,1] = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$. Узявши рівно по одному елементу з кожного класу A_{α}, утворимо множину $B \subset [0,1]$ (саме можливість створення такої множини є твердженням аксіоми вибору). Припустимо, що $B \in \mathcal{S}_1$, тоді визначено значення $\lambda_1(B)$.

Нехай $\lambda_1(B) = 0$. Маємо

$$[0,1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (B + r), \quad B + r \text{ неперетинні.} \tag{2.24}$$

Дійсно, для кожного $x \in [0,1]$ знайдеться еквівалентний йому $y \in B$ і тоді $x \in (B + r)$ для $r = x - y$, $r \in \mathbb{Q}$. Якби

$$x \in (B + r_1) \cap (B + r_2) \;\Leftrightarrow\; x - r_1,\; x - r_2 \in B,$$

то у B знайшлося б два різних елементи з раціональною різницею, що суперечить побудові B. Нагадаємо, що міра λ_1 не змінюється при зсувах множин, тому всі $\lambda_1(B + r) = 0$. Із (2.24) отримаємо

$$\lambda_1([0,1]) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda_1(B + r) = 0.$$

Нехай $\lambda_1(B) > 0$. Маємо

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (B + r) \subset [-1,2], \quad B + r \text{ неперетинні.}$$

Тому

$$\lambda_1([-1,2]) \ge \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda_1(B+r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda_1(B) = +\infty. \qquad (2.25)$$

В обох випадках значень $\lambda_1(B)$ отримано суперечність.

Тепер уведемо міру Лебега–Стілтьєса. Нехай $\mathsf{X} = \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неспадна неперервна справа функція. На півкільці

$$\mathcal{P}_1 = \big\{(a,b] \;\big|\; a,\ b \in \mathbb{R}\big\}$$

визначимо функцію множин

$$\lambda_F\left((a,b]\right) := F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

Тоді λ_F є мірою на $\mathcal{P}_1$ (теорема 2.4), за нею визначимо зовнішню міру λ_F^*. Через $\mathcal{S}_F$ позначимо клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно λ_F^*.

Тоді множини з $\mathcal{S}_F$ називаються *вимірними за Лебегом–Стілтьєсом*, звуження λ_F^* на $\mathcal{S}_F$ називатимемо *мірою Лебега–Стілтьєса* і також позначатимемо через λ_F.

Зазначимо, що для будь-якої функції F справджується $\mathcal{S}_F \supset \mathcal{P}_1$, і тому

$$\mathcal{S}_F \supset \sigma a\big(\mathcal{P}_1\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Зауваження 2.7. Будь-яка міра λ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, що набуває скінченних значень на обмежених множинах, є частинним випадком міри Лебега–Стілтьєса. Можемо, наприклад, взяти функцію

$$F(x) = \begin{cases} \lambda\big((0,x]\big), & x \ge 0, \\ -\lambda\big((x,0]\big), & x < 0, \end{cases}$$

і тоді $\lambda = \lambda_F$.

2.7. Регулярність мір

У цьому підрозділі доведемо важливу властивість мір, визначених на підмножинах $\mathbb{R}^d$. Нехай міра λ визначена на півкільці $\mathcal{P}_d$ і за схемою Каратеодорі продовжена на σ-алгебру $\mathcal{S}$. Нагадаємо, що таке продовження єдине і збігається з λ^*, і $\mathcal{S}$ містить борельову σ-алгебру $\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$.

Теорема 2.11. *Нехай λ — міра на $\mathcal{S}$, скінченна на обмежених множинах. Тоді для будь-яких $A \in \mathcal{S}$, $\lambda(A) < +\infty$, і $\varepsilon > 0$ знайдуться компактна множина K_ε і відкрита множина U_ε такі, що*

$$K_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon, \quad \lambda(A) - \lambda\big(K_\varepsilon\big) < \varepsilon, \quad \lambda\big(U_\varepsilon\big) - \lambda(A) < \varepsilon.$$

Доведення. За теоремою 2.8,

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)\Big|\ A_n \in \mathcal{P}_d,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big\}.$$

Тому знайдуться $A_n \in \mathcal{P}_d$ такі, що

$$A_n = \prod_{k=1}^{d}(a_{kn}, b_{kn}]\,,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (2.26)$$

Для кожного $n \geq 1$ розглядатимемо відкриті множини

$$U_n = \prod_{k=1}^{d}(a_{kn}, b_{kn} + \delta)\,, \quad U_n \downarrow A_n,\ \delta \downarrow 0.$$

За неперервністю міри зверху, маємо $\lambda\big(U_n\big) \to \lambda\big(A_n\big),\ \delta \downarrow 0$, і для кожного $n \geq 1$ можемо вибрати $\delta = \delta_n > 0$ таке, що

$$\lambda\big(U_n\big) < \lambda\big(A_n\big) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Тоді $U_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ задовольняє твердження теореми. Дістаємо

$$\lambda\big(U_\varepsilon\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\big(U_n\big) < \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lambda\big(A_n\big) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\big(A_n\big) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(2.26)}{<} \lambda(A) + \varepsilon.$$

Виконання інших умов для U_ε з очевидністю випливають з її побудови.

Побудуємо K_ε. За неперервністю міри зверху, маємо

$$\big(A \setminus [-j, j]^d\big) \downarrow \varnothing \Rightarrow \lambda\big(A \setminus [-j, j]^d\big) \downarrow 0, \quad j \uparrow \infty,$$

і зафіксуємо таке j, що

$$\lambda\big(A \setminus [-j, j]^d\big) < \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (2.27)$$

Використовуючи доведене в теоремі вище, виберемо відкриту множину $\tilde{U}_{\varepsilon/2}$ таку, що

$$\big([-j, j]^d \setminus A\big) \subset \tilde{U}_{\varepsilon/2}, \quad \lambda\big(\tilde{U}_{\varepsilon/2}\big) - \lambda\big([-j, j]^d \setminus A\big) < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad (2.28)$$

і покладемо

$$K_\varepsilon = [-j, j]^d \setminus \tilde{U}_{\varepsilon/2}.$$

Тоді $K_\varepsilon \subset A$ (якщо $x \in K_\varepsilon$ і $x \notin A$, ми одночасно отримаємо, що $x \notin \tilde{U}_{\varepsilon/2}$ і $x \in \tilde{U}_{\varepsilon/2}$). Множина K_ε замкнена як перетин двох замкнених: $[-j, j]^d$ і доповнення до $\tilde{U}_{\varepsilon/2}$, є компактом оскільки також є обмеженою. Крім того, легко перевіряється включення

$$A \setminus K_\varepsilon = \big(A \setminus [-j, j]^d\big) \bigcup \big(\tilde{U}_{\varepsilon/2} \setminus \big([-j, j]^d \setminus A\big)\big),$$

використовуючи для двох елементів об'єднання нерівності з (2.27) і (2.28), отримаємо

$$\lambda\big(A \setminus K_\varepsilon\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Очевидним наслідком теореми 2.11 є наступна властивість λ, яку часто називають властивістю *регулярності міри*.

Наслідок 2.4. *Нехай λ — міра на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, скінченна на обмежених множинах, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda(A) < +\infty$. Тоді*

$$\begin{aligned} \lambda(A) \quad &= \sup\big\{\lambda(K) \bigm| K \subset A,\ K - \textit{компакт}\big\} = \\ &= \inf\big\{\lambda(U) \bigm| U \supset A,\ U - \textit{відкрита}\big\}. \end{aligned}$$

Наступне твердження показує, що множини, вимірні за Каратеодорі, є, у певному сенсі, близькими до борельових множин.

Наслідок 2.5. *Нехай λ — міра на $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}_d$, скінченна на обмежених множинах, $A \in \mathcal{S}$. Тоді*

$$\exists\, B,\ C \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big):\ B \subset A \subset C,\ \lambda(B) = \lambda(A) = \lambda(C).$$

Доведення. Спочатку припустимо, що $\lambda(A) < +\infty$. Користуючись теоремою 2.11 для $\varepsilon = 1/n$, для всіх $n \geq 1$ візьмемо компакт $K_{1/n}$ і відкриту множину $U_{1/n}$ такі, що

$$K_{1/n} \subset A \subset U_{1/n}, \quad \lambda(A) - \lambda\big(K_{1/n}\big) < \frac{1}{n}, \quad \lambda\big(U_{1/n}\big) - \lambda(A) < \frac{1}{n}\,.$$

Покладемо

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{1/n}, \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{1/n}\,,$$

очевидно, що $B,\ C \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big), \quad K_{1/n} \subset B \subset A \subset C \subset U_{1/n}$. Також для кожного $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda(A) - \lambda(B) &\leq \lambda(A) - \lambda\big(K_{1/n}\big) < \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ \lambda(A) - \lambda(B) = 0, \\ \lambda(C) - \lambda(A) &\leq \lambda\big(U_{1/n}\big) - \lambda(A) < \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ \lambda(C) - \lambda(A) = 0. \end{aligned}$$

Якщо $\lambda(A) = +\infty$, ми довільним чином представимо $\mathbb{R}^d$ у вигляді зліченного об'єднання брусів:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j, \quad D_j \in \mathcal{P}_d \text{ неперетинні.}$$

Тоді $\lambda\big(A \cap D_j\big) < +\infty$, для кожного такого перетину візьмемо

$$B_j,\ C_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) :\ B_j \subset \big(A \cap D_j\big) \subset C_j.$$

Множини

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \quad C = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,$$

очевидно, задовольняють твердженню наслідку. □

Вправи

Вправа 2.1. Навести приклад невід'ємної адитивної функції множин на півкільці, що не є мірою.

Вправа 2.2. Нехай λ — адитивна функція множин на кільці $\mathcal{K}$. Довести, що для $A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{K}$

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{1\le k\le n} \lambda\big(A_k\big) - \sum_{1\le k<l\le n} \lambda\big(A_k \cap A_l\big) + \\ + \sum_{1\le k<l<m\le n} \lambda\big(A_k \cap A_l \cap A_m\big) - \ldots + (-1)^{n+1}\lambda\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big).$$

Вправа 2.3. Нехай λ — невід'ємна, скінченно-адитивна, скінченна функція множин на кільці $\mathcal{K}$, неперервна в $\varnothing$ зверху (тобто $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) = 0$ для будь-яких $A_n \downarrow \varnothing,\ A_n \in \mathcal{K}$). Довести, що λ — міра на $\mathcal{K}$.

Вправа 2.4. Нехай λ — невід'ємна, скінченно-адитивна, σ-півадитивна функція множин на кільці $\mathcal{K}$. Довести, що λ — міра на $\mathcal{K}$.

Вправа 2.5. Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неспадна неперервна зліва функція. На півкільці $\mathcal{P}_1' = \big\{[a,b)\ \big|\ a,\ b \in \mathbb{R}\big\}$ визначимо функцію множин $\lambda_F\left([a,b)\right) := F\left(b\right) - F\left(a\right)$. Довести, що λ_F є мірою на $\mathcal{P}_1'$.

Вправа 2.6(лема Бореля – Кантеллі). Нехай λ — міра на σ-алгебрі $\mathcal{A}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\big(A_n\big) < +\infty$. Довести, що

$$\lambda\Big(\big\{x :\ x \text{ належать нескінченній кількості } A_n,\ n \ge 1\big\}\Big) = 0.$$

Вправа 2.7. Довести, що не існує інваріантної відносно зсувів міри λ, визначеної на $2^{\mathbb{R}}$ і такої, що $\lambda\big([0,1]\big) = 1$.

Розділ 3
Вимірні функції. Збіжність

3.1. Означення вимірної функції. Приклади

Означення 3.1. *Вимірним простором* називається пара $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$, де $\mathcal{F}$ — деяка σ-алгебра підмножин непорожньої множини X.

У подальшому ми вивчатимемо властивості функцій $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, пов'язані з наявністю σ-алгебр у просторах X та Y. При цьому важливу роль гратимуть прообрази множин

$$f^{-1}(B) := \{x \in \mathsf{X} : \ f(x) \in B\}, \quad B \subset \mathsf{Y}.$$

Нагадаємо, що прообрази мають такі властивості:
1) $f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}\left(B_\alpha\right)$;
2) $f^{-1}\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}\left(B_\alpha\right)$;
3) $f^{-1}\left(B_1 \setminus B_2\right) = f^{-1}\left(B_1\right) \setminus f^{-1}\left(B_2\right)$
(тут $B_\alpha \subset \mathsf{Y}$, α пробігає довільну множину індексів).

Означення 3.2. Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{X})$ і $(\mathsf{Y}, \mathcal{F}_\mathsf{Y})$ — вимірні простори. Функція $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ називається $(\mathcal{F}_\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{Y})$-*вимірною*, якщо для кожної множини $B \in \mathcal{F}_\mathsf{Y}$ справджується $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\mathsf{X}$.

Скорочено вимогу означення можна написати так: $f^{-1}\left(\mathcal{F}_\mathsf{Y}\right) \subset \mathcal{F}_\mathsf{X}$. Якщо з контексту зрозуміло, які σ-алгебри $\mathcal{F}_\mathsf{X}$ та $\mathcal{F}_\mathsf{Y}$ розглядаються, f може просто називатися *вимірною*.

Приклад 3.1. У випадку $\mathcal{F}_\mathsf{X} = 2^\mathsf{X}$ будь-яка функція $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ буде $(\mathcal{F}_\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{Y})$-вимірною.

Приклад 3.2 (тотожне відображення)**.** . Якщо $\mathsf{Y} = \mathsf{X}$, $f(x) = x$, то функція f буде $(\mathcal{F}_\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{X})$-вимірною (оскільки тут $f^{-1}(B) = B$).

Приклад 3.3 (постійне відображення)**.** . Функція $f(x) = c$, $c \in \mathsf{Y}$, завжди буде $(\mathcal{F}_\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{Y})$-вимірною. Адже тоді $f^{-1}(B)$ дорівнює X або $\varnothing$ у випадках $c \in B$ та $c \notin B$ відповідно.

Теорема 3.1. *Нехай* $(\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{X})$ *і* $(\mathsf{Y}, \mathcal{F}_\mathsf{Y})$ *— вимірні простори,* $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$. *Тоді набір множин*

$$f^{-1}\left(\mathcal{F}_\mathsf{Y}\right) := \left\{f^{-1}\left(B\right), \ B \in \mathcal{F}_\mathsf{Y}\right\}$$

є σ-алгеброю підмножин X.

Доведення. Використаємо властивості прообразів і перевіримо, що $f^{-1}(\mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$ задовольняє означення σ-алгебри. Нехай $A_n \in f^{-1}(\mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$, $A_n = f^{-1}(B_n)$, $B_n \in \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}$. Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}_{\mathsf{Y}},$$
$$A_1 \setminus A_2 = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2), \quad B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{F}_{\mathsf{Y}},$$

і тому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_1 \setminus A_2 \in f^{-1}(\mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$. Крім того, $\mathsf{X} = f^{-1}(\mathsf{Y}),\ \mathsf{Y} \in \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}$, а отже $\mathsf{X} \in f^{-1}(\mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$. □

Зазначимо, що σ-алгебра $f^{-1}(\mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$ є найменшою можливою в X, що дає вимірність функції f. Інколи говорять, що ця σ-алгебра є породженою відображенням f.

Наступне твердження в багатьох випадках спрощує перевірку вимірності функції.

Теорема 3.2. *Нехай* $(\mathsf{X}, \mathcal{F}_{\mathsf{X}})$ *і* $(\mathsf{Y}, \mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$ *— вимірні простори,* $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$*, і для класу* $\mathcal{H}$ *підмножин* Y *справджується, що*

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Y}} \subset \sigma a(\mathcal{H}), \quad \forall B \in \mathcal{H}:\ f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\mathsf{X}}.$$

Тоді функція f *є* $(\mathcal{F}_{\mathsf{X}}, \mathcal{F}_{\mathsf{Y}})$*-вимірною.*

Доведення. Розглянемо клас множин

$$\mathcal{L} = \big\{B \subset \mathsf{Y}:\ \ f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\mathsf{X}}\big\}.$$

За умовою теореми, $\mathcal{L} \supset \mathcal{H}$.

Крім того, $\mathcal{L}$ є σ-алгеброю. Якщо $B_n \in \mathcal{L},\ n \geq 1$, то $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_{\mathsf{X}}$, із властивостей прообразів і означення σ-алгебри отримуємо

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_{\mathsf{X}},$$
$$f^{-1}\big(B_1 \setminus B_2\big) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_{\mathsf{X}},$$

а отже $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{L}$. Також $\mathsf{X} = f^{-1}(\mathsf{Y}),\ \mathsf{Y} \in \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}$, і тому $\mathsf{X} \in \mathcal{L}$.

Значить, $\mathcal{L} \supset \sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\mathsf{X}}$ для всіх $B \in \mathcal{F}_{\mathsf{Y}}$, f задовольняє означенню вимірності. □

У більшості випадків (зокрема, при означенні інтеграла Лебега нижче) матимемо справу з дійснозначними функціями, і тоді в $\mathbb{R}$ буде братися борельова σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Означення 3.3. Нехай $(\mathsf{X},\mathcal{F})$ — вимірний простір. Функція $f:\mathsf{X}\to\mathbb{R}$ називається *$\mathcal{F}$-вимірною*, якщо вона $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірна.

Наслідок 3.1. *Наступні твердження еквівалентні:*
1) *функція* $f:\mathsf{X}\to\mathbb{R}$ *$\mathcal{F}$-вимірна;*
2) $\forall\, a\in\mathbb{R}: f^{-1}((-\infty,a))=\{f<a\}\in\mathcal{F}$*;*
3) $\forall\, a\in\mathbb{R}: f^{-1}((-\infty,a])=\{f\le a\}\in\mathcal{F}$*;*
4) $\forall\, a\in\mathbb{R}: f^{-1}([a,+\infty))=\{f\ge a\}\in\mathcal{F}$*;*
5) $\forall\, a\in\mathbb{R}: f^{-1}((a,+\infty))=\{f> a\}\in\mathcal{F}$*.*

Доведення. Нехай справджується 1). У твердженнях 2)–5) розглядаються прообрази борельових множин, тому вони мають належати $\mathcal{F}$.

Покажемо, що з 2) випливає 1). Розглянемо клас множин

$$\mathcal{H}=\{(-\infty,a),\ a\in\mathbb{R}\}\ ,$$

і покажемо, що $\sigma a(\mathcal{H})\supset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Маємо, що для всіх $a,\ b\in\mathbb{R}$ виконується

$$(-\infty,b]=\bigcap_{n\ge1}\left(-\infty,b+\frac{1}{n}\right)\in\sigma a(\mathcal{H}),$$

$$(a,b]=(-\infty,b]\setminus(-\infty,a]\in\sigma a(\mathcal{H})\ \Rightarrow\ \sigma a(\mathcal{H})\supset\mathcal{P}_1\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sigma a(\mathcal{H})\supset\sigma a(\mathcal{P}_1)=\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Із теореми 3.2 випливає вимірність f.

Аналогічно доводиться, що 1) випливає з 3), 4) та 5), в усіх цих випадках σ-алгебри, породжені цими класами множин, містять $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (і навіть збігаються з нею). □

Приклад 3.4. Для $f(x)=\mathbf{1}_A(x)$ маємо

$$\{x\in\mathsf{X}:\ \mathbf{1}_A(x)\ge a\}=\begin{cases}\mathsf{X}, & a\le 0,\\ A, & 0<a\le1,\\ \varnothing, & a>1.\end{cases}$$

Тому ця функція $\mathcal{F}$-вимірна тоді й тільки тоді, коли $A\in\mathcal{F}$.

Означення 3.4. Нехай Y — метричний простір, $\mathcal{B}(\mathsf{Y})$ — борельова σ-алгебра в Y. Функція $f:\mathsf{Y}\to\mathbb{R}$ називається *борельовою*, якщо вона $\big(\mathcal{B}(\mathsf{Y}),\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-вимірна.

Приклади борельових функцій.

1. Якщо $f:\mathsf{Y}\to\mathbb{R}$ неперервна на Y, то вона борельова. Адже тоді $\{x:\ f(x)<a\}=f^{-1}((-\infty,a))$ є відкритою множиною в Y (як прообраз

відкритої множини при неперервному відображенні), і тому належить $\mathcal{B}(\mathsf{Y})$. Із наслідку 3.1 маємо потрібну вимірність.

2. Якщо $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ монотонна на $\mathbb{R}$, то вона борельова (ми розглядаємо стандартну метрику на $\mathbb{R}$). Припустимо, наприклад, що f неспадна. Тоді множина $\{x:\ f(x)<a\}$ є однією із множин вигляду: $\varnothing$, $(-\infty,x_0)$, $(-\infty,x_0]$, $\mathbb{R}$, і в усіх випадках належить $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Цілком аналогічно можна показати, що буде борельовою монотонна функція $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Означення 3.5. Функція $f:A\to\mathbb{R}$, $A\in\mathcal{S}_d$, називається *вимірною за Лебегом*, якщо вона $\big(\mathcal{S}_d\cap A,\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-вимірна.

Вимірні за Лебегом функції для нас важливі тому, що це — клас функцій f, для яких визначені міри

$$\lambda_d\big(\{x:\ f(x)\in B\}\big)=\lambda_d\big(f^{-1}(B)\big),\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

адже вказані прообрази належать $\mathcal{S}_d$. Очевидно, що якщо $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ борельова, то вона вимірна за Лебегом.

Зауваження 3.1. Також розглядатимемо функції зі значеннями в $\overline{\mathbb{R}}=$ $=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$. Якщо покласти $\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$, де $\operatorname{arctg}(-\infty)=-\pi/2$, $\operatorname{arctg}(+\infty)=\pi/2$, то $\big(\overline{\mathbb{R}},\rho\big)$ стає метричним простором. Нескладно переконатися, що елементами борельової σ-алгебри $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ є всі множини з $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, а також об'єднання цих множин із $\{-\infty\}$ та з $\{+\infty\}$. Функцію $f:\mathsf{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ також називатимемо $\mathcal{F}$-вимірною, якщо вона $\big(\mathcal{F},\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\big)$-вимірна. Як правило, твердження нижче дані для функцій зі значеннями в $\mathbb{R}$, але вони легко переносяться на випадок $f:\mathsf{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ (якщо при цьому не виникає невизначеності типу $\infty-\infty$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, для доведення достатньо розглянути дійсну функцію $f\mathbf{1}_{|f|<\infty}$).

3.2. Дії з вимірними функціями

Теорема 3.3 (теорема про суперпозицію вимірних відображень). *Нехай* $(\mathsf{X},\mathcal{F}_\mathsf{X})$, $(\mathsf{Y},\mathcal{F}_\mathsf{Y})$, $(\mathsf{Z},\mathcal{F}_\mathsf{Z})$ — *вимірні простори, функція* $f:\mathsf{X}\to\mathsf{Y}$ *є* $(\mathcal{F}_\mathsf{X},\mathcal{F}_\mathsf{Y})$*-вимірною, а функція* $g:\mathsf{Y}\to\mathsf{Z}$ *є* $(\mathcal{F}_\mathsf{Y},\mathcal{F}_\mathsf{Z})$*-вимірною. Тоді функція* $h(x)=g(f(x)):\mathsf{X}\to\mathsf{Z}$ *є* $(\mathcal{F}_\mathsf{X},\mathcal{F}_\mathsf{Z})$*-вимірною.*

Доведення. Нехай $B\in\mathcal{F}_\mathsf{Z}$. Розглянемо прообраз

$$\begin{aligned}h^{-1}(B)=\{x\in\mathsf{X}:\ h(x)=g(f(x))\in B\}=&\\ =\big\{x\in\mathsf{X}:\ f(x)\in g^{-1}(B)\big\}=f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right).&\end{aligned}$$

Із вимірності g отримуємо, що $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}_\mathsf{Y}$, а згідно з відповідною вимірністю f далі дістаємо, що $f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\in\mathcal{F}_\mathsf{X}$. □

Наслідок 3.2. *Нехай* $(\mathsf{X}, \mathcal{F}_\mathsf{X})$ *— вимірний простір, функції* $f_k : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le d$, $\mathcal{F}_\mathsf{X}$*-вимірні, функція* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *— борельова. Тоді функція* $h(x) = g\left(f_1(x), \ldots, f_d(x)\right) : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_\mathsf{X}$*-вимірна.*

Доведення. Ми можемо використати теорему 3.3 для $\mathsf{Y} = \mathbb{R}^d$, $\mathsf{Z} = \mathbb{R}$, борельових σ-алгебр у цих просторах і функції

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x)) : \ \mathsf{X} \to \mathbb{R}^d.$$

Для цього лише треба довести, що f є $\left(\mathcal{F}_\mathsf{X}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$-вимірною. Оскільки $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \sigma a\left(\mathcal{P}_d\right)$ (теорема 1.6), достатньо довести, що $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\mathsf{X}$ для будь-якої множини $B \in \mathcal{P}_d$ (теорема 3.2). Розглянемо прообраз множини з $\mathcal{P}_d$:

$$f^{-1}\Big(\prod_{k=1}^{d}(a_k, b_k]\Big) = \Big\{x \in \mathsf{X} : \ f(x) \in \prod_{k=1}^{d}(a_k, b_k]\Big\} =$$

$$= \{x \in \mathsf{X} : \ f_1(x) \in (a_1, b_1], \ldots, f_d(x) \in (a_d, b_d]\} = \bigcap_{k=1}^{d} f_k^{-1}\left((a_k, b_k]\right) .$$

Оскільки $(a_k, b_k] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то всі функції f_k $\mathcal{F}_\mathsf{X}$-вимірні, тут ми отримуємо перетин множин з σ-алгебри $\mathcal{F}_\mathsf{X}$, і тому $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\mathsf{X}$. □

Теорема 3.4. *Нехай функції* $f_1, \ f_2 : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$*-вимірні,* $c \in \mathbb{R}$*. Тоді* $\mathcal{F}$*-вимірними є функції*

$$cf_1, \quad |f_1|, \quad f_1 + f_2, \quad f_1 - f_2, \quad f_1 f_2, \quad \frac{f_1}{f_2}\mathbf{1}_{\{f_2 \ne 0\}},$$
$$\max\{f_1, f_2\}, \quad \min\{f_1, f_2\} .$$

Доведення. Кожен із записаних виразів (крім частки функцій) є суперпозицією неперервної (а тому борельової) функції $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ та вимірних $f_1, \ f_2$. Із наслідку 3.2 випливає потрібна нам $\mathcal{F}$-вимірність.

Для $f = \dfrac{f_1}{f_2}\mathbf{1}_{\{f_2 \ne 0\}}$ (вважаємо, що $f(x) = 0$ при $f_2(x) = 0$) і довільного $a \in \mathbb{R}$ перевіряємо, що

$$\{f < a\} \cap \{f_2 > 0\}, \ \{f < a\} \cap \{f_2 < 0\}, \ \{f < a\} \cap \{f_2 = 0\} \in \mathcal{F}.$$

Зокрема, перша множина збігається з $\{f_1 - af_2 < 0\} \cap \{f_2 > 0\} \in \mathcal{F}$. Тому $\{f < a\} \in \mathcal{F}$, із наслідку 3.1 випливає $\mathcal{F}$-вимірність. □

Зрозуміло, що вказане твердження поширюється на випадок суми, добутку тощо довільної скінченної кількості вимірних функцій.

Наслідок 3.3. *Нехай функції* $f_1,\ f_2 : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$*-вимірні. Тоді*

$$\{f_1 < f_2\}\,,\ \{f_1 \le f_2\}\,,\ \{f_1 = f_2\} \in \mathcal{F}\,.$$

Доведення. Ці множини — це відповідно прообрази борельових множин

$$f^{-1}\left((-\infty, 0)\right),\ f^{-1}\left((-\infty, 0]\right),\ f^{-1}\left(\{0\}\right)$$

для вимірного відображення $f = f_1 - f_2$. □

Теорема 3.5. *Нехай функції* $f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R},\ n \ge 1,$ $\mathcal{F}$*-вимірні. Тоді* $\mathcal{F}$*-вимірними є функції*

$$g^{(1)}(x) = \inf_{n\ge1} f_n(x), \quad g^{(2)}(x) = \sup_{n\ge1} f_n(x),$$

$$g^{(3)}(x) = \underline{\lim}_{\,n\to\infty} f_n(x), \quad g^{(4)}(x) = \overline{\lim}_{\,n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Якщо для кожного $x \in \mathsf{X}$ *визначена*

$$g^{(5)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то $g^{(5)}$ $\mathcal{F}$*-вимірна.*

Доведення. Для кожного $a \in \mathbb{R}$ маємо

$$\big\{x:\ g^{(1)}(x) \ge a\big\} = \bigcap_{n\ge1} \big\{x:\ g_n(x) \ge a\big\},$$

$$\big\{x:\ g^{(2)}(x) \le a\big\} = \bigcap_{n\ge1} \big\{x:\ g_n(x) \le a\big\},$$

і записані перетини множин з $\mathcal{F}$ також лежать у цій σ-алгебрі. Із наслідку 3.1 отримуємо $\mathcal{F}$-вимірність $g^{(1)}$ і $g^{(2)}$.

Вимірність $g^{(3)}$ і $g^{(4)}$ тепер випливає з відомого зображення верхньої та нижньої границь

$$g^{(3)}(x) = \sup_{n\ge1}\ \inf_{k\ge n} f_k(x), \quad g^{(4)}(x) = \inf_{n\ge1}\ \sup_{k\ge n} f_k(x)\,.$$

Якщо для всіх $x \in \mathsf{X}$ визначена $g^{(5)}(x)$, то ця функція збігається з $g^{(3)}$ і тому є $\mathcal{F}$-вимірною. □

Наслідок 3.4. *Нехай функції* $f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R},\ n \ge 1,$ $\mathcal{F}$*-вимірні,*

$$A = \big\{x \in \mathsf{X}:\ \textit{існує}\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)\big\}\,.$$

Тоді $A \in \mathcal{F}$.

Доведення. За позначеннями теореми 3.5,

$$A = \big\{x \in \mathsf{X}:\ g^{(3)}(x) = g^{(4)}(x)\big\}\,.$$

Залишається скористатися твердженнями теореми 3.5 і наслідку 3.3. □

3.3. Наближення вимірних функцій простими

При побудові інтеграла Лебега важливу роль відіграватимуть прості функції.

Означення 3.6. Функція називається *простою*, якщо її множина значень скінченна.

Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$ — деякий вимірний простір, функція $p : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ проста, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — її множина значень. Покладемо

$$A_k = \{x \in \mathsf{X} : \ p(x) = a_k\}, \ 1 \le k \le n.$$

Тоді

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x). \tag{3.1}$$

Лема 3.1. *Нехай проста функція p записана у вигляді* (3.1)*, де значення a_k попарно різні, а множини A_k попарно неперетинні. Тоді*

$$p \text{ є } \mathcal{F}\text{-вимірною} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k : \ A_k \in \mathcal{F}.$$

Доведення. $(\Rightarrow)$ $A_k = p^{-1}(\{a_k\})$, $\{a_k\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, тому для $\mathcal{F}$-вимірної p виконується $A_k \in \mathcal{F}$.

$(\Leftarrow)$ Приклад 3.4 показує, що всі $\mathbf{1}_{A_k}(x)$ $\mathcal{F}$-вимірні. За теоремою 3.4, буде вимірною і їх лінійна комбінація — функція p. □

Теорема 3.6. *Нехай функція $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$-вимірна і невід'ємна. Тоді існує послідовність $\mathcal{F}$-вимірних невід'ємних простих функцій $p_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, таких, що $p_n(x) \uparrow f(x)$ для кожного $x \in \mathsf{X}$.*

Доведення. Покажемо, що твердження теореми справджується для функцій

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{x: \ k2^{-n} < f(x) \le (k+1)2^{-n}\}}(x) + n\mathbf{1}_{\{x: \ f(x) > n\}}(x)\,.$$

Тоді кожна p_n — проста і невід'ємна, $p_n(x) \le f(x)$. Оскільки множини в індикаторах належать $\mathcal{F}$, то p_n — $\mathcal{F}$-вимірна.

Побудову p_n за значеннями f описуємо таким чином. На числовій прямій відмічаємо точки $\frac{k}{2^n}$, $0 \le k \le n2^n$. Для кожного $x \in \mathsf{X}$ вибираємо найбільше відмічене значення зліва від $f(x)$ — це і буде величина $p_n(x)$. При переході від n до $n+1$ всі відмічені точки зберігаються, і деякі нові точки додаються. При цьому для кожного $f(x)$ найбільше відмічене значення зліва не може зменшитися, тому $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$.

Якщо $f(x) = +\infty$, для всіх n у цій точці матимемо $f(x) > n$ і $p_n(x) = n$. Якщо $f(x)$ скінченна, то для $n > f(x)$ одержимо

$$f(x) - \frac{k}{2^n} \leq p_n(x) < f(x).$$

Для кожного $x \in \mathsf{X}$ отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x). \qquad \square$$

Далі ми неодноразово вживатимемо позначення

$$f_+(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{x:\ f(x)\geq 0\}}(x) = \max\{f(x), 0\},$$
$$f_-(x) = -f(x)\mathbf{1}_{\{x:\ f(x)<0\}}(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Функції f_+ і f_- є $\mathcal{F}$-вимірними (якщо $\mathcal{F}$-вимірна сама f) і невід'ємними. При цьому

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Наступне твердження дає нам наближення f простими функціями у випадку, коли f не обов'язково є невід'ємною.

Наслідок 3.5. *Нехай функція* $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$*-вимірна. Тоді існує послідовність* $\mathcal{F}$*-вимірних простих функцій* $p_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, *таких, що*

$$|p_n(x)| \leq |f(x)|, \quad \lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x).$$

Доведення. Користуючись теоремою 3.6, візьмемо послідовності невід'ємних вимірних простих функцій $q_n(x) \uparrow f_+(x)$ і $r_n(x) \uparrow f_-(x)$. Покладемо $p_n(x) = q_n(x) - r_n(x)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) - \lim_{n\to\infty} r_n(x) = f_+(x) - f_-(x) = f(x).$$

Також $|p_n(x)| \leq |q_n(x)| + |r_n(x)| \leq f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$. $\square$

3.4. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь

Наступні властивості функцій будуть пов'язані з наявністю певної міри.

Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — вимірний простір із мірою, $P(x)$ — певна властивість елементів $x \in \mathsf{X}$, що для кожного x справджується або ні.

Означення 3.7. Будемо говорити, що властивість $P(x)$ виконується *майже скрізь* відносно міри λ на множині $A \subset \mathsf{X}$, якщо існує множина $\mathsf{N} \subset \mathsf{X},\ \lambda(\mathsf{N}) = 0$, така, що для кожного $x \in A \setminus \mathsf{N}$ справджується $P(x)$.

При цьому вживаються позначення $P(x)$ м. с. на A, $P(x) \pmod{\lambda}$ на A, інколи говорять, що $P(x)$ справджується для майже всіх $x \in A$. Як правило, це означення використовується у випадку $A = \mathsf{X}$, і тоді вказівка на множину може опускатися в записі.

У двох наступних означеннях окремо зазначимо найважливіші для нас приклади властивостей, що справджуються м. с.

Розглянемо дві функції $f,\ g : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Означення 3.8. Функції f та g називаються *еквівалентними* відносно міри λ, якщо існує множина $\mathsf{N} \subset \mathsf{X},\ \lambda(\mathsf{N}) = 0$, така, що для кожного $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}$ виконується $f(x) = g(x)$.

У цьому випадку вживаються позначення $f \sim g \pmod{\lambda}$, $f \sim g$, $f = g \pmod{\lambda}$. Для $\mathcal{F}$-вимірних функцій f і g це просто означає, що $\lambda(\{x \in \mathsf{X} :\ f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Приклад 3.5. Функція Діріхле $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначається за правилом

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Маємо, що $D \sim 0 \pmod{\lambda_1}$, де λ_1 — міра Лебега. Тут можна взяти $\mathsf{N} = \mathbb{Q}$.

Теорема 3.7. *Нехай функція f $\mathcal{F}$-вимірна, $f \sim g \pmod{\lambda}$ і міра λ — повна. Тоді функція g $\mathcal{F}$-вимірна.*

Доведення. Потрібно довести, що для будь-якої множини $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ справджується $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Маємо

$$g^{-1}(B) = \{x :\ g(x) \in B\} =$$
$$= \{x :\ g(x) \in B,\ f(x) \neq g(x)\} \bigcup \{x :\ g(x) \in B,\ f(x) = g(x)\} = A_1 \cup A_2.$$

Оскільки λ повна, то для множини N з означення еквівалентності матимемо

$$A_1 \subset \{x :\ f(x) \neq g(x)\} \subset \mathsf{N} \quad \Rightarrow \quad A_1 \in \mathcal{F}.$$

Також дістанемо

$$A_2 = \{x :\ f(x) \in B,\ f(x) = g(x)\} = \{x :\ f(x) \in B\} \setminus \{x :\ f(x) \neq g(x)\}.$$

Обидві множини в різниці належать $\mathcal{F}$ — перша за вимірністю f, друга — як підмножина N, $\lambda(\mathsf{N}) = 0$. Отже, $A_2 \in \mathcal{F}$, $g^{-1}(B) = A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$. $\square$

Розглянемо функції $f,\ f_n : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}},\ n \geq 1$.

Означення 3.9. Функції f_n *збігаються* до функції f *майже скрізь* відносно міри λ, якщо існує множина $\mathsf{N} \subset \mathsf{X},\ \lambda(\mathsf{N}) = 0$, така, що

$$\forall\, x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Іншими словами, тут ми маємо поточкову збіжність f_n до f на множині $\mathsf{X} \setminus \mathsf{N},\ \lambda(\mathsf{N}) = 0$. Стандартними є позначення: $f_n \to f$ м. с., $f_n \to f \pmod{\lambda}$.

Приклад 3.6. Розглянемо $f_n(x) = \sin^n x,\ x \in \mathbb{R}$. Тоді $f_n \to 0 \pmod{\lambda}_1$. Тут $\mathsf{N} = \{(n + 1/2)\pi,\ n \in \mathsf{Z}\}$.

Теорема 3.8. *Нехай* $f_n \to f \pmod{\lambda}$ *і* $f_n \to g \pmod{\lambda}$. *Тоді* $f \sim g \pmod{\lambda}$.

Доведення. Візьмемо множини N_1 і N_2 такі, що

$$\begin{aligned} f_n(x) &\to f(x), \quad x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}_1, \quad \lambda(\mathsf{N}_1) = 0, \\ f_n(x) &\to g(x), \quad x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}_2, \quad \lambda(\mathsf{N}_2) = 0, \end{aligned}$$

і розглянемо множину $\mathsf{N} = \mathsf{N}_1 \cup \mathsf{N}_2$, $\lambda(\mathsf{N}) = 0$. Тоді для кожного $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}$ буде одночасно справджуватись

$$f_n(x) \to f(x), \quad f_n(x) \to g(x).$$

Оскільки границя числової послідовності єдина, для всіх цих x матимемо $f(x) = g(x)$, і тому $f \sim g$. $\square$

Зауваження 3.2. Легко довести й обернене твердження: якщо $f_n \to f \pmod{\lambda}$ і $f \sim g \pmod{\lambda}$, то $f_n \to g \pmod{\lambda}$.

Теорема 3.9. *Нехай* $f_n \to f \pmod{\lambda}$, *функції* f_n $\mathcal{F}$*-вимірні і міра* λ *— повна. Тоді функція* f $\mathcal{F}$*-вимірна.*

Доведення. Нехай $f_n(x) \to f(x)$ для всіх $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}$, $\lambda(\mathsf{N}) = 0$. Розглянемо функції

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}, \\ 0, & x \in \mathsf{N}, \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}, \\ 0, & x \in \mathsf{N}. \end{cases}$$

Оскільки міра λ повна і $\tilde{f}_n \sim f_n$, то функції $\tilde{f}_n$ $\mathcal{F}$-вимірні (теорема 3.7). Для кожного $x \in \mathsf{X}$ виконується $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x)$, і тому функція $\tilde{f}$ $\mathcal{F}$-вимірна (теорема 3.5). З еквівалентності $\tilde{f}_n \sim f$ і теореми 3.7 отримуємо вимірність f. $\square$

3.5. Теорема Єгорова

Теорема 3.10 (теорема Єгорова). *Нехай функції* $f,\ f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}$*-вимірні,* $f_n \to f \pmod{\lambda}$, $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$. *Тоді*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon,\ \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon :\ \sup_{x \in \mathsf{X} \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Доведення. Позначимо $\mathsf{N} = \{x \in \mathsf{X} :\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$. Оскільки ці функції вимірні, то $\mathsf{N} \in \mathcal{F}$ і $\lambda(\mathsf{N}) = 0$. За означенням границі числової послідовності, для довільного $\delta > 0$ маємо

$$\forall\, x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}\ \exists\, n \geq 1\ \forall\, k \geq n :\ |f_k(x) - f(x)| < \delta.$$

У записі для множин це означає, що

$$\mathsf{X} \setminus \mathsf{N} \subset \Big(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{x :\ |f_k(x) - f(x)| < \delta\} \Big).$$

Перейшовши до доповнень отримуємо

$$\mathsf{N} \supset \Big(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{x :\ |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\} \Big).$$

У правій частині включення маємо перетин спадної послідовності множин. Оскільки $\lambda(\mathsf{N}) = 0$, міра цього перетину дорівнює нулю. Із теореми 2.2 про неперервність міри зверху (з урахуванням умови $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$) маємо, що

$$\lim_{n \to \infty} \lambda\Big(\bigcup_{k \geq n} \{x :\ |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\} \Big) = 0.$$

Для кожного $j \geq 1$ братимемо $\delta = 1/j$, і візьмемо такий номер n_j, що

$$\lambda\Big(\bigcup_{k \geq n_j} \{x :\ |f_k(x) - f(x)| \geq 1/j\} \Big) < 2^{-j} \varepsilon. \tag{3.2}$$

Покладемо

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq n_j} \{x :\ |f_k(x) - f(x)| \geq 1/j\}$$

і покажемо, що для цієї множини справджується твердження теореми. Із (3.2) випливає, що

$$\lambda(A_\varepsilon) \leq \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \varepsilon = \varepsilon.$$

Також
$$\mathsf{X} \setminus A_\varepsilon = \bigcap_{j\ge 1} \bigcap_{k \ge n_j} \{x: \ |f_k(x) - f(x)| < 1/j\}.$$

Якщо $k \ge n_j$, то
$$\sup_{x \in \mathsf{X}\setminus A_\varepsilon} |f_k(x) - f(x)| \le 1/j.$$

Тому є рівномірна збіжність f_k до f на $\mathsf{X} \setminus A_\varepsilon$. □

Приклад 3.7. На множині $[0,1]$ маємо, що $f_n(x) = x^n \to 0 \pmod{\lambda}_1$. У цьому випадку можемо взяти $A_\varepsilon = [1-\varepsilon/2, 1]$, і тоді
$$\sup_{x \in \mathsf{X}\setminus A_\varepsilon} |f_n(x)| = \big(1-\varepsilon/2\big)^n \to 0, \ n \to \infty.$$

3.6. Збіжність за мірою

Нехай дано $\mathcal{F}$-вимірні функції $f, \ f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$.

Означення 3.10. Функції f_n *збігаються* до функції f *за мірою* λ, якщо
$$\forall \varepsilon > 0: \ \lambda\left(\{x \in \mathsf{X}: \ |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right) \to 0, \ n \to \infty.$$

Для даної збіжності, як правило, вживається позначення $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Знову ми отримаємо єдиність границі з точністю до еквівалентності функцій.

Теорема 3.11. *Нехай $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ і $f_n \xrightarrow{\lambda} g$. Тоді $f \sim g \pmod{\lambda}$.*

Доведення. З очевидної нерівності
$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$
випливає, що
$$\{x: \ |f(x)-g(x)| \ge \varepsilon\} \subset \\ \subset \left(\left\{x: \ |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \bigcup \left\{x: \ |f_n(x) - g(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right),$$
і тому
$$\lambda\left(\{x: \ |f(x)-g(x)| \ge \varepsilon\}\right) \le \\ \le \lambda\left(\left\{x: \ |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x: \ |f_n(x) - g(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right). \quad (3.3)$$

Оскільки $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ і $f_n \xrightarrow{\lambda} g$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ два останні доданки прямують до нуля при $n \to \infty$, і тому $\lambda(\{x: \ |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$. За теоремою про неперервність міри знизу,

$$\lambda(\{x: \ f(x) \neq g(x)\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x: \ |f(x) - g(x)| \geq 1/n\}) = 0,$$

звідки і випливає потрібна еквівалентність. □

Зауваження 3.3. Справджується й обернене твердження: якщо $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ і $f \sim g \pmod{\lambda}$, то $f_n \xrightarrow{\lambda} g$.

Два наступні приклади показують, що між збіжністю м. с. та збіжністю за мірою немає прямого зв'язку.

Приклад 3.8. Розглянемо таку послідовність функцій на $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x), \ n \geq 1.$$

Тоді відносно міри Лебега λ_1 буде $f_n \to 0$ м. с. (адже для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ маємо $f_n(x) = 0$, починаючи з деякого номера n). При цьому $f_n \stackrel{\lambda_1}{\nrightarrow} 0$, оскільки

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}: \ |f_n(x)| \geq 1/2\}) = 1 \nrightarrow 0, \ n \to \infty.$$

Приклад 3.9. (*"плаваюча сходинка"*.) На множині $\mathbb{R}$ із лебеговою мірою визначимо функції

$$f_{nk}(x) = \mathbf{1}_{[(k-1)/n, k/n]}(x), \ n \geq 1, \ 1 \leq k \leq n,$$

і візьмемо їх послідовність $\{f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots\}$. Тоді

$$\forall\, 0 < \varepsilon \leq 1: \ \lambda_1(\{x \in \mathbb{R}: \ |f_{nk}(x)| \geq \varepsilon\}) = 1/n,$$

що прямує до нуля для нашої послідовності. З іншого боку, для кожного фіксованого $x \in [0,1]$ серед $f_{nk}(x)$ нескінченно багато нулів і нескінченно багато одиниць. Тому така числова послідовність не має границі, і збіжність майже скрізь для вказаної послідовності функцій не виконується.

Зв'язок між двома збіжностями справджується за додаткової умови скінченності міри простору.

Теорема 3.12 (теорема Лебега про зв'язок між збіжностями). *Нехай функції $f, \ f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}$-вимірні, $f_n \to f \pmod{\lambda}$, $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$. Тоді $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.*

Доведення. Позначимо $\mathsf{N} = \{x \in \mathsf{X} : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$, $\lambda(\mathsf{N}) = 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді, за означенням границі числової послідовності, маємо

$$\forall\, x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}\ \exists\, n \geq 1\ \forall\, k \geq n : \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Це означає, що

$$\mathsf{X} \setminus \mathsf{N} \subset \Big(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{x : \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}\Big).$$

Для доповнень отримуємо

$$\mathsf{N} \supset \Big(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{x : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\Big).$$

Із неперервності міри зверху та умови $\lambda(\mathsf{X}) < +\infty$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\Big(\bigcup_{k\geq n} \{x : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Замінивши все об'єднання на одну множину з нього (із $k = n$) ми можемо лише зменшити значення міри. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\Big(\{x : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\Big) = 0,$$

що й означає збіжність $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. □

Зазначимо, що це твердження також можна вивести з теореми 3.10 (теореми Єгорова).

3.7. Фундаментальність за мірою

Як і раніше, розглядаємо $\mathcal{F}$-вимірні функції $f_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

Означення 3.11. Послідовність f_n, $n \geq 1$, називається *фундаментальною за мірою* λ, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0, \delta > 0\ \exists\, n_0 \geq 1\ \forall\, m, n \geq n_0 : \lambda\left(\{x \in \mathsf{X} : \ |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \delta.$$

Іншими словами, послідовність f_n, $n \geq 1$, є фундаментальною за мірою λ, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \lambda\left(\{x \in \mathsf{X} : \ |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) \to 0, \quad m,\ n \to \infty.$$

Теорема 3.13. *Якщо послідовність f_n, $n \geq 1$, збіжна за мірою λ, то вона фундаментальна за мірою λ.*

Доведення. Нехай $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. Аналогічно нерівності (3.3), для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\lambda\left(\{x:\ |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq$$
$$\leq \lambda\left(\left\{x:\ |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x:\ |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

При $m,\ n \to \infty$ обидва доданки правої частини нерівності збігаються до нуля. Тому ліва частина нерівності прямує до нуля, що й означає потрібну фундаментальність. □

Наступна теорема матиме кілька важливих наслідків.

Теорема 3.14. *Нехай послідовність $f_n,\ n \geq 1$, фундаментальна за мірою λ. Тоді існують вимірна функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ та підпослідовність $f_{n_k},\ k \geq 1$, такі, що одночасно*

1) $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$, $k \to \infty$;
2) $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$, $k \to \infty$.

Доведення. **Крок 1. Вибір f_{n_k}.** Для кожного $k \geq 1$ використаємо означення фундаментальності для $\delta = \varepsilon = 2^{-k}$ і візьмемо n_k такі, що для всіх $m,\ n \geq n_k$:

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathsf{X}:\ |f_m(x) - f_n(x)| \geq 2^{-k}\right\}\right) < 2^{-k}.$$

При цьому кожного разу вважатимемо $n_{k+1} > n_k$. Так ми отримаємо

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathsf{X}:\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}\right) < 2^{-k}. \tag{3.4}$$

Далі покажемо, що саме підпослідовність $f_{n_k},\ k \geq 1$, задовольняє твердження теореми.

Крок 2. Визначення f, $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$. Розглянемо множину

$$\mathsf{N} = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq j} \left\{x \in \mathsf{X}:\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\} \tag{3.5}$$

(тобто ми включаємо до N всі $x \in \mathsf{X}$, для яких записані нерівності виконуються для нескінченної кількості значень k). Для кожного $j \geq 1$ маємо

$$\lambda(\mathsf{N}) \leq \lambda\Big(\bigcup_{k \geq j} \left\{x:\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{k \geq j} \lambda\left(\left\{x:\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}\right) \overset{(3.4)}{<} \sum_{k \geq j} 2^{-k} = 2^{1-j}.$$

Оскільки j ми можемо взяти як завгодно малим, то $\lambda(\mathsf{N}) = 0$.

Для кожного фіксованого $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}$ нерівності із (3.5) справджуватимуться для скінченної кількості значень k. Тому для деякого j (залежного від цього x) для всіх $k \geq j$ дістаємо

$$\left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| < 2^{-k}. \tag{3.6}$$

Тому для фіксованого $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}$ числова послідовність $f_{n_k}(x),\ k \geq 1$, буде фундаментальною. Адже для $l > k \geq j$

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{i=k}^{l-1} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| \overset{(3.6)}{<} \sum_{i=k}^{l-1} 2^{-i} < \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-k},$$

що прямує до нуля при $k \to \infty$.

Значить, для кожного $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}$ існує границя послідовності $f_{n_k}(x)$, $k \geq 1$, і ми можемо покласти

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x), & x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{N}, \\ 0, & x \in \mathsf{N}. \end{cases}$$

Оскільки $\lambda(\mathsf{N}) = 0$, то $f_{n_k} \to f \pmod \lambda$, $k \to \infty$. Також f є вимірною як границя вимірних функцій:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \left(f_{n_k}(x) \mathbf{1}_{\mathsf{X}\setminus\mathsf{N}}(x)\right).$$

Крок 3. $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$**.** Візьмемо довільні $\varepsilon,\ \delta > 0$, і зафіксуємо $j \geq 1$ таке, що $2^{1-j} < \min\{\varepsilon,\ \delta\}$. Покладемо

$$\mathsf{M} = \bigcup_{k\geq j} \left\{x \in \mathsf{X} :\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}. \tag{3.7}$$

Із (3.5) бачимо, що $\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$, для $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{M}$ виконується $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$, а також

$$\left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| < 2^{-i}, \quad i \geq j. \tag{3.8}$$

Тому для всіх $k \geq j$ і $x \in \mathsf{X} \setminus \mathsf{M}$ маємо

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq$$
$$\leq \lim_{l\to\infty} \sum_{i=k}^{l-1} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| \overset{(3.8)}{<} \sum_{i=k}^{l-1} 2^{-i} < \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-j} < \varepsilon.$$

Значить, для всіх $k \geq j$

$$\{x \in \mathsf{X} :\ |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\} \subset \mathsf{M},$$

і ми отримуємо

$$\lambda\left(\{x :\ |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lambda(\mathsf{M}) \overset{(3.7)}{\leq}$$
$$\overset{(3.7)}{\leq} \sum_{k=j}^{\infty} \lambda\left(\left\{x :\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}\right) \overset{(3.4)}{<} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-j} < \delta.$$

Фактично ми перевірили за означенням збіжність

$$\lambda\left(\{x :\ |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\}\right) \to 0, \quad k \to \infty,$$

і тому $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$. $\square$

Наслідок 3.6 (теорема Ріса). *Якщо $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, то існує підпослідовність $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$, $k \to \infty$.*

Доведення. Оскільки послідовність f_n, $n \geq 1$, збіжна за мірою, вона фундаментальна за мірою (теорема 3.13). Згідно з теоремою, знайдуться функція $g : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ та підпослідовність f_{n_k}, $k \geq 1$, такі, що $f_{n_k} \to g \pmod{\lambda}$ і $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$. Залишається довести, що у цьому випадку ми можемо взяти $g = f$.

Якщо $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, то й будь-яка підпослідовність $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ (це прямо випливає з означення збіжності за мірою). Також $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$, і тому $f \sim g \pmod{\lambda}$ згідно з теоремою 3.11. Але тоді збіжність $f_{n_k} \to g \pmod{\lambda}$ еквівалентна збіжності $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$ (зауваження 3.2). $\square$

Наслідок 3.7. *Послідовність f_n, $n \geq 1$, фундаментальна за мірою λ тоді й тільки тоді, коли вона збіжна за мірою λ.*

Доведення. У теоремі 3.13 доведено, що зі збіжності випливає фундаментальність.

Якщо послідовність f_n, $n \geq 1$, фундаментальна, ми можемо виділити підпослідовність $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, і для кожного номера $n \geq 1$ довільним чином братимемо номер із виділеної підпослідовності $n_k > n$. Тоді при $n \to \infty$ буде $n_k \to \infty$, і матимемо

$$\lambda\left(\{x :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq$$
$$\leq \lambda\left(\left\{x :\ |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x :\ |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

У правій частині нерівності перший доданок прямує до нуля, оскільки наша послідовність фундаментальна, а другий доданок прямує до нуля, тому що $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$. Так ми отримуємо, що

$$\lambda\left(\{x: \; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \to 0,$$

і значить $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. □

Зазначимо, що за допомогою теореми Ріса та теореми Єгорова можна отримати наступне відоме твердження.

Теорема 3.15 (теорема Лузіна). *Нехай $A = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$, λ — міра Лебега на A, функція $f: \; A \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує неперервна функція $g: \; A \to \mathbb{R}$ така, що*

$$\lambda\left(\{x \in A: \; f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Доведення теореми Лузіна можна знайти, наприклад, у [3] та [9].

Вправи

Вправа 3.1. Довести, що відношення $f \sim g \pmod{\lambda}$ є відношенням еквівалентності.

Вправа 3.2. Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має похідну в кожній точці $\mathbb{R}$. Довести, що функція f' — борельова.

Вправа 3.3. Нехай λ — скінченна міра на $\mathcal{F}$. Для $\mathcal{F}$-вимірних функцій f і g покладемо

$$\rho(f, g) = \sup\bigl\{\delta \;\big|\lambda\bigl(\bigl\{x: \; |f(x) - g(x)| \geq \delta\bigr\}\bigr) \geq \delta\bigr\}.$$

Довести, що ρ є метрикою на просторі класів еквівалентних вимірних функцій (класів, отриманих за відношенням еквівалентності із вправи 3.1), і збіжність за цією метрикою еквівалентна збіжності за мірою λ.

Вправа 3.4. Довести, що

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f, \quad g_n \xrightarrow{\lambda} g \;\Rightarrow\; f_n + g_n \xrightarrow{\lambda} f + g.$$

Вправа 3.5. Навести приклад, у якому

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f, \quad g_n \xrightarrow{\lambda} g, \quad f_n g_n \overset{\lambda}{\not\to} fg.$$

Вправа 3.6. Нехай λ — скінченна міра, $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, $g_n \xrightarrow{\lambda} g$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Довести, що $\varphi(f_n, g_n) \xrightarrow{\lambda} \varphi(f, g)$.

Вправа 3.7. Нехай функція $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом. Довести, що існує борельова функція $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ така, що $f \sim g \pmod{\lambda_d}$.

Розділ 4
Інтеграл Лебега

4.1. Означення інтеграла

Інтеграл, визначений у цьому підрозділі, власне і називається інтегралом Лебега. Ми дамо означення у трьох частинах, поступово розширюючи клас функцій, для яких визначено інтеграл.

Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — довільний вимірний простір із мірою, $A \in \mathcal{F}$. Ми розглядаємо $\mathcal{F}$-вимірні (як правило, просто говоритимемо — вимірні) функції, що визначені на X і набувають значень у $\overline{\mathbb{R}}$.

Означення 4.1 (означення інтеграла, частина 1). Нехай функція $p : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ — проста, невід'ємна, вимірна,

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad A_k \in \mathcal{F} \text{ неперетинні.} \tag{4.1}$$

Тоді покладемо

$$\int_A p\, d\lambda := \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap A\big). \tag{4.2}$$

Для інтеграла також можуть уживатися позначення вигляду

$$\int_A p(x)\, d\lambda(x), \quad \int_A p(x)\, \lambda(dx).$$

За наявності нескінченних значень у виразах, ми використовуємо такі узгодження для арифметичних дій:

$$0 \cdot (+\infty) = 0, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty \ (a > 0), \quad a \cdot (+\infty) = -\infty \ (a < 0)\,.$$

Покажемо, що значення інтеграла не залежить від конкретного запису p. Нехай для p справджується (4.1), а також

$$p(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x), \quad B_i \in \mathcal{F} \text{ неперетинні,}$$

причому $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{i=1}^{j} B_i = \mathsf{X}$ (цього ми можемо досягти, додаючи, за необхідності, доданки з $a_k = 0$ або $b_i = 0$). Тоді

$$A_k \cap A = \bigcup_{i=1}^{j} \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big), \quad B_i \cap A = \bigcup_{k=1}^{n} \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big),$$

де множини в об'єднаннях неперетинні, і

$$\int_A p\,d\lambda \overset{(4.2)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap A\big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_k \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big),$$

$$\int_A p\,d\lambda \overset{(4.2)}{=} \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda\big(B_i \cap A\big) = \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{n} b_i \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big).$$

Якщо $A_k \cap B_i \neq \varnothing$, то $a_k = b_i$ (адже для $x \in A_k \cap B_i$ маємо $p(x) = a_k = b_i$), і тому значення записаних сум рівні.

Властивості інтеграла від простих невід'ємних вимірних функцій. Нехай $p,\ p_1$ — функції з указаного класу, $A,\ B \in \mathcal{F}$.

1. Якщо $\forall\, x \in A:\ p(x) \geq p_1(x)$, то $\int_A p\,d\lambda \geq \int_A p_1\,d\lambda$.

Доведення. Нехай

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad p_1(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x),$$

де $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{i=1}^{j} B_i = \mathrm{X}$ і множини $A_k,\ B_i$ неперетинні в цих об'єднаннях. Тоді

$$\int_A p\,d\lambda \overset{(4.2)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap A\big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_k \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big),$$

$$\int_A p_1\,d\lambda \overset{(4.2)}{=} \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda\big(B_i \cap A\big) = \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{n} b_i \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big).$$

Якщо $A_k \cap B_i \cap A \neq \varnothing$, то справджується $a_k \geq b_i$, адже

$$x \in A_k \cap B_i \cap A \ \Rightarrow a_k = p(x) \geq p_1(x) = b_i\,,$$

і звідси випливає наша властивість. □

2. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то $\int_{A\cup B} p\,d\lambda = \int_A p\,d\lambda + \int_B p\,d\lambda$.

Доведення. Використовуючи запис (4.1), з адитивності λ отримуємо

$$\int_{A\cup B} p\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap (A\cup B)\big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \big(\lambda\big(A_k \cap A\big) + \lambda\big(A_k \cap B\big)\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap A\big) + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap B\big) = \int_A p\,d\lambda + \int_B p\,d\lambda\,. \quad \square$$

3. Якщо $A \subset B$, то
$$\int_A p\, d\lambda \le \int_B p\, d\lambda\,. \tag{4.3}$$

Доведення. Із властивості 2 і невід'ємності значення інтеграла дістаємо
$$\int_B p\, d\lambda = \int_A p\, d\lambda + \int_{B\setminus A} p\, d\lambda \ge \int_A p\, d\lambda\,. \qquad \square$$

Означення 4.2 (означення інтеграла, частина 2). Нехай функція $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — невід'ємна, вимірна,
$$K(f) = \big\{p : \mathsf{X} \to \mathbb{R} :\ p - \text{проста невід'ємна вимірна},\ p(x) \le f(x)\big\}.$$

Тоді покладемо
$$\int_A f\, d\lambda := \sup_{p\in K(f)} \int_A p\, d\lambda\,. \tag{4.4}$$

Зазначимо, що $K(f) \ne \varnothing$, тотожний нуль завжди належить цьому набору. У правій частині (4.4) стоять інтеграли, які ми шукаємо за означенням 4.1.

Для обґрунтування коректності означення 4.2 також треба показати, що воно узгоджується з означенням 4.1, і для простої p обидва означення дають одну величину інтеграла. Тут у записі інтеграла відмітимо цифрою, за якою частиною означення його взято.

З одного боку, $p \in K(p)$, і
$$(2)\ \int_A p\, d\lambda = \sup_{p_1\in K(p)} (1)\ \int_A p_1\, d\lambda \ge (1) \int_A p\, d\lambda,$$

оскільки тут серед елементів супремуму є $(1) \int_A p\, d\lambda$.

З іншого боку,
$$p_1 \in K(p) \Rightarrow p_1(x) \le p(x) \overset{\text{Властивість 1}}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{\text{Властивість 1}}{\Longrightarrow} (1) \int_A p_1\, d\lambda \le (1) \int_A p\, d\lambda \overset{\text{Означення 4.2}}{\Longrightarrow} (2) \int_A p\, d\lambda \le (1) \int_A p\, d\lambda\,.$$

Тому ми маємо рівність інтегралів із двох означень.

Далі використаємо позначення
$$f_+(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{f\ge 0\}}(x), \quad f_-(x) = -f(x)\mathbf{1}_{\{f<0\}}(x)\,.$$

Означення 4.3 (означення інтеграла, частина 3). Нехай f — вимірна функція, для якої є скінченним хоча б один з інтегралів
$$\int_A f_+\, d\lambda\,, \quad \int_A f_-\, d\lambda\,. \tag{4.5}$$

Тоді покладемо

$$\int_A f\,d\lambda := \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda\,.$$

Якщо обидва інтеграли (4.5) скінченні, функція f називається *інтегровною* на A.

Через $\mathsf{L}(A,\lambda)$ позначатимемо клас функцій, інтегровних на множині A за мірою λ.

Тут використано інтеграли від невід'ємних вимірних функцій f_+ і f_-, що визначені за частиною 2. Легко бачити, що означення 4.2 і 4.3 узгоджуються. Якщо $f \ge 0$, то

$$f_- = 0, \quad (2)\int_A f_-\,d\lambda = 0,$$

$$(3)\int_A f\,d\lambda = (2)\int_A f_+\,d\lambda - (2)\int_A f_-\,d\lambda = (2)\int_A f_+\,d\lambda\,.$$

Зауваження 4.1. Функція f є інтегровною на A тоді й лише тоді, коли $\int_A f\,d\lambda$ визначений і скінченний.

Приклад 4.1. На $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_1, \lambda_1)$ розглянемо функцію

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тоді f_+ і f_- — прості невід'ємні функції, що рівні 1 на множинах нескінченної міри, і за частиною 1 означення, маємо

$$\int_{\mathbb{R}} f_+\,d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f_-\,d\lambda_1 = +\infty.$$

Для кожної з функцій f_+ і f_- інтеграл за λ_1 визначений, але ці функції не інтегровні на $\mathbb{R}$. Інтеграл $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda_1$ не визначений.

4.2. Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій

Доведення різних властивостей інтеграла Лебега часто проводиться за такою схемою: спочатку твердження доводиться для інтеграла від простої невід'ємної функції, потім узагальнюється на інші вимірні функції. У такому узагальненні важливу роль відіграє гранична теорема, яку ми доведемо в цьому підрозділі.

Як і вище, $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — це довільний вимірний простір із мірою, $A \in \mathcal{F}$.

Лема 4.1. *Нехай* $p,\ p_n\ :\ \mathsf{X} \to \mathbb{R},\ n \ge 1,$ *— прості невід'ємні вимірні функції такі, що:*

1) $\forall\, x \in \mathsf{X},\ n \ge 1:\ p_n(x) \le p_{n+1}(x);$
2) $\forall\, x \in \mathsf{X}:\ \lim_{n\to\infty} p_n(x) \ge p(x).$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int_A p_n\, d\lambda \ge \int_A p\, d\lambda\,.$$

Доведення. Запишемо функцію p у вигляді

$$p(x) = \sum_{i=1}^{j} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad A_i \in \mathcal{F} \text{ неперетинні.}$$

Для фіксованого $\varepsilon > 0$ розглянемо множини

$$B_n = \big\{x \in A:\ p_n(x) \ge (1-\varepsilon)p(x)\big\}.$$

З умови 1) леми випливає, що $B_n \uparrow$, з умови 2) — що $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$. Використовуючи властивості інтеграла від простої функції з підрозділу 4.1, маємо

$$\int_A p_n\, d\lambda \overset{\text{Власт.3}}{\ge} \int_{B_n} p_n\, d\lambda \overset{\text{Власт.1}}{\ge} \int_{B_n} (1-\varepsilon) p\, d\lambda = \sum_{i=1}^{j} (1-\varepsilon) a_i \lambda\big(A_i \cap B_n\big).$$

За неперервністю міри знизу, $\lambda\big(A_i \cap B_n\big) \to \lambda\big(A_i \cap A\big)$, $n \to \infty$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_A p_n\, d\lambda \ge (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{j} a_i \lambda\big(A_i \cap A\big) = (1-\varepsilon) \int_A p\, d\lambda$$

(записана тут границя існує як границя неспадної послідовності). Спрямувавши $\varepsilon \to 0+$, отримаємо твердження леми. □

Теорема 4.1. *Нехай* $f\ :\ \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *— невід'ємна вимірна функція, а* $p_n : \mathsf{X} \to \mathbb{R},\ n \ge 1,$ *— прості невід'ємні вимірні функції такі, що* $p_n(x) \uparrow f(x)$ *для кожного* $x \in \mathsf{X}$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A p_n\, d\lambda = \int_A f\, d\lambda\,. \tag{4.6}$$

Доведення. Зазначимо, що записана в (4.6) границя існує як границя неспадної послідовності. Оскільки $p_n(x) \le f(x)$, то $p_n \in K(f)$, і з частини 2 означення інтеграла ми отримуємо

$$\int_A f\, d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p\, d\lambda \ge \int_A p_n\, d\lambda \Rightarrow \int_A f\, d\lambda \ge \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\, d\lambda\,.$$

З іншого боку, для будь-якої $p \in K(f)$ маємо

$$p(x) \le f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) \overset{\text{Лема 4.1}}{\Longrightarrow} \int_A p\,d\lambda \le \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda \overset{(4.4)}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{(4.4)}{\Longrightarrow} \int_A f\,d\lambda \le \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda\,.$$

Із двох отриманих протилежних нерівностей випливає рівність (4.6). □

Зауваження 4.2. Вказана в теоремі 4.1 послідовність простих функцій p_n існує для будь-якої невід'ємної вимірної f (це видно з теореми 3.6).

4.3. Зліченна адитивність інтеграла

Теорема 4.2. *Нехай f : $\mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — невід'ємна вимірна функція. Тоді функція множин*

$$\mu(A) = \int_A f\,d\lambda, \quad A \in \mathcal{F},$$

є мірою на $\mathcal{F}$.

Доведення. Потрібно довести σ-адитивність μ. Нехай $A_n,\ n \ge 1,$ — неперетинні множини з $\mathcal{F}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Крок 1. Розглянемо випадок $f(x) = \mathbf{1}_B(x),\ B \in \mathcal{F}$. Тоді

$$\mu(A) = \lambda\big(B \cap A\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(B \cap A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Крок 2. Нехай функція $f(x)$ — проста і

$$f(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x), \quad B_i \in \mathcal{F}.$$

Тоді

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda\big(B_i \cap A\big) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mu_i\big(A\big),$$

де кожна $\mu_i\big(A\big) = \lambda\big(B_i \cap A\big)$ — σ-адитивна функція множин. Міра, помножена на невід'ємний коефіцієнт, є мірою, і сума кількох мір є мірою. Тому μ σ-адитивна.

Крок 3. Нехай $f(x)$ — довільна невід'ємна вимірна функція. Візьмемо прості невід'ємні $p_r \uparrow f$ (вони існують за теоремою 3.6). Тоді

$$\int_A p_r\,d\lambda \overset{\text{Крок 2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p_r\,d\lambda \overset{(4.4)}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\lambda\,.$$

Узявши границю при $r \to \infty$, із теореми 4.1 отримаємо

$$\int_A f\,d\lambda \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\lambda\,. \tag{4.7}$$

З іншого боку, використовуючи властивості 2 і 3 інтегралів від простих функцій, для будь-яких $r,\ q \ge 1$ маємо

$$\int_A f\,d\lambda \overset{(4.4)}{\ge} \int_A p_r\,d\lambda \overset{\text{Власт. 3}}{\ge} \int_{\bigcup_{n=1}^{q} A_n} p_r\,d\lambda \overset{\text{Власт. 2}}{=} \sum_{n=1}^{q} \int_{A_n} p_r\,d\lambda\,.$$

Узявши границю при $r \to \infty$, дістанемо

$$\int_A f\,d\lambda \ge \sum_{n=1}^{q} \int_{A_n} f\,d\lambda\,.$$

Тепер, спрямувавши $q \to \infty$, отримаємо

$$\int_A f\,d\lambda \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\lambda\,. \tag{4.8}$$

Із протилежних нерівностей (4.7) і (4.8) отримуємо рівність, що й означає σ-адитивність μ. □

4.4. Елементарні властивості інтеграла

Доведемо основні властивості інтеграла Лебега, якими потім будемо неодноразово користуватися.

Як і раніше, $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — вимірний простір із мірою, ми розглядаємо $\mathcal{F}$-вимірні функції $f, g:\ \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, $A,\ B \in \mathcal{F}$.

1. Якщо $\lambda(\mathsf{N}) = 0$, то $\int_{\mathsf{N}} f\,d\lambda = 0$.

Доведення. Якщо $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$ — проста невід'ємна функція, то

$$\int_{\mathsf{N}} f\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap \mathsf{N}\big) = 0,$$

адже всі $\lambda\big(A_k \cap \mathsf{N}\big) = 0$. Якщо f — довільна невід'ємна функція, то існує послідовність простих невід'ємних $p_r \uparrow f$, і тоді

$$\int_{\mathsf{N}} f\,d\lambda \overset{\text{Теорема 4.1}}{=} \lim_{r\to\infty} \int_{\mathsf{N}} p_r\,d\lambda = 0.$$

Для довільної вимірної f маємо

$$\int_{\mathsf{N}} f_+\,d\lambda = \int_{\mathsf{N}} f_-\,d\lambda = 0 \Rightarrow \int_{\mathsf{N}} f\,d\lambda = \int_{\mathsf{N}} f_+\,d\lambda - \int_{\mathsf{N}} f_-\,d\lambda = 0. \qquad \square$$

2. $\int_{\mathsf{X}} f\mathbf{1}_A\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda$ (за умови, що хоча б один із цих інтегралів існує).

Доведення. Якщо $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{1}_{A_k}(x)$ — проста невід'ємна функція, то

$$f(x)\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{1}_{A_k}(x)\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{1}_{A_k\cap A}(x),$$

$$\int_{\mathsf{X}} f(x)\mathbf{1}_A(x)\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k\lambda\big(A_k\cap A\big) = \int_A f(x)\,d\lambda\,.$$

Для довільної невід'ємної f візьмемо прості невід'ємні функції $p_r \uparrow f$, тоді $p_r\mathbf{1}_A \uparrow f\mathbf{1}_A$, і ми маємо

$$\int_{\mathsf{X}} f(x)\mathbf{1}_A(x)\,d\lambda = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathsf{X}} p_r(x)\mathbf{1}_A(x)\,d\lambda = \lim_{r\to\infty}\int_A p_r(x)\,d\lambda = \int_A f(x)\,d\lambda\,.$$

Якщо f — довільна вимірна функція, то

$$\big(f\mathbf{1}_A\big)_+ = f_+\mathbf{1}_A, \quad \big(f\mathbf{1}_A\big)_- = f_-\mathbf{1}_A\,,$$

$$\int_{\mathsf{X}} f\mathbf{1}_A\,d\lambda = \int_{\mathsf{X}} f_+\mathbf{1}_A\,d\lambda - \int_{\mathsf{X}} f_-\mathbf{1}_A\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda\,.$$

$\square$

3. $\int_A cf(x)\,d\lambda = c\int_A f(x)\,d\lambda$, $c\in\mathbb{R}$ (за умови, що $\int_A f(x)\,d\lambda$ існує).

Доведення. Нехай $c \geq 0$. Якщо $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{1}_{A_k}(x)$ — проста невід'ємна функція, то $cf(x)$ — також проста невід'ємна, і

$$\int_A cf(x)\,d\lambda = \int_A\Big(\sum_{k=1}^{n} ca_k\mathbf{1}_{A_k}(x)\Big)\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n} ca_k\lambda\big(A_k\cap A\big) = c\int_A f(x)\,d\lambda\,. \tag{4.9}$$

Для довільної невід'ємної f беремо прості невід'ємні функції $p_r \uparrow f$, тоді $cp_r \uparrow cf$, і ми маємо

$$\int_A cf(x)\,d\lambda = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathsf{X}} cp_r(x)\,d\lambda \overset{(4.9)}{=} \lim_{r\to\infty} c\int_{\mathsf{X}} p_r(x)\,d\lambda = \\ = c\int_A f(x)\,d\lambda\,. \tag{4.10}$$

Оскільки $c \geq 0$, то для довільної f маємо

$$(cf)_+ = cf_+, \quad (cf)_- = cf_-\,, \tag{4.11}$$

і тому

$$\begin{aligned}\int_A cf(x)\,d\lambda = \int_A (cf(x))_+\,d\lambda - \int_A (cf(x))_-\,d\lambda &\overset{(4.11),(4.10)}{=} \\ \overset{(4.11),(4.10)}{=} c\int_A f_+(x)\,d\lambda - c\int_A f_-(x)\,d\lambda &= c\int_A f(x)\,d\lambda\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Якщо $c < 0$, то

$$(cf)_+ = (-c)f_-, \quad (cf)_- = (-c)f_+\,,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned}\int_A cf(x)\,d\lambda &= \int_A (cf(x))_+\,d\lambda - \int_A (cf(x))_-\,d\lambda = \\ &= \int_A (-c)f_-(x) -\,d\lambda - \int_A (-c)f_+(x)\,d\lambda \overset{(4.12),(-c)>0}{=} \\ &\overset{(4.12),(-c)>0}{=} (-c)\int_A f_-(x)\,d\lambda - (-c)\int_A f_+(x)\,d\lambda = \\ &= c\Big(\int_A f_+(x)\,d\lambda - \int_A f_-(x)\,d\lambda\Big) = c\int_A f(x)\,d\lambda\,. \quad \square\end{aligned}$$

4. Якщо $f(x) \leq g(x)$, то $\int_A f\,d\lambda \leq \int_A g\,d\lambda$ (за умови, що обидва записані інтеграли існують).

Доведення. Нехай f і g — невід'ємні. Тоді для відповідних класів простих функцій з означення 4.2 маємо: $K(f) \subset K(g)$. Тому

$$\int_A f\,d\lambda = \sup_{p\in K(f)} \int_A p\,d\lambda \leq \sup_{p\in K(g)} \int_A p\,d\lambda = \int_A g\,d\lambda \tag{4.13}$$

(в інтегралі від g береться супремум більшої множини).

У загальному випадку справджується

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) \Rightarrow f_+(x) \leq g_+(x), \quad f_-(x) \geq g_-(x) &\overset{(4.13)}{\Longrightarrow} \\ \overset{(4.13)}{\Longrightarrow} \int_A f_+\,d\lambda \leq \int_A g_+\,d\lambda, \quad \int_A f_-\,d\lambda \geq \int_A g_-\,d\lambda &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda \leq \int_A g_+\,d\lambda - \int_A g_-\,d\lambda &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_A f\,d\lambda \leq \int_A g\,d\lambda\,. \end{aligned}$$

$\square$

5. Якщо $f(x) \geq 0$, $A \subset B$, то $\int_A f\,d\lambda \leq \int_B f\,d\lambda$.

Доведення. Візьмемо прості невід'ємні функції $p_r \uparrow f$. Із використанням відповідної властивості інтеграла від простих функцій, маємо

$$\int_A f\,d\lambda = \lim_{r\to\infty} \int_A p_r\,d\lambda \overset{(4.3)}{\leq} \lim_{r\to\infty} \int_B p_r\,d\lambda = \int_B f\,d\lambda. \qquad \square$$

6. Нехай $A \subset B$ й існує $\int_B f\,d\lambda$, тоді визначений і $\int_A f\,d\lambda$. Якщо при цьому $f \in \mathsf{L}(B,\lambda)$, то $f \in \mathsf{L}(A,\lambda)$.

Доведення. Згідно із властивістю 5,

$$\int_A f_+\,d\lambda \leq \int_B f_+\,d\lambda, \quad \int_A f_-\,d\lambda \leq \int_B f_-\,d\lambda.$$

Хоча б один з інтегралів по B є скінченним, тому буде скінченним і відповідний інтеграл по A та існує $\int_A f\,d\lambda$. Для $f \in \mathsf{L}(B,\lambda)$ усі записані інтеграли будуть скінченними, і значить $f \in \mathsf{L}(A,\lambda)$. $\square$

7. Нехай $\int_{\mathsf{X}} f_-\,d\lambda < +\infty$. Тоді функція множин $\nu(A) = \int_A f\,d\lambda$ є σ-адитивною на $\mathcal{F}$.

Доведення. З умови випливає, що існує $\int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda$, і за властивістю 6, $\nu(A)$ визначена для всіх $A \in \mathcal{F}$. Нехай $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{F}$ — неперетинні. Тоді

$$\int_A f\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.2}{=}$$
$$\overset{\text{Теорема } 4.2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_+\,d\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_-\,d\lambda =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{A_n} f_+\,d\lambda - \int_{A_n} f_-\,d\lambda \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\lambda. \qquad \square$$

8. $f \in \mathsf{L}(A,\lambda) \Leftrightarrow |f| \in \mathsf{L}(A,\lambda)$, при цьому

$$\Big| \int_A f\,d\lambda \Big| \leq \int_A |f|\,d\lambda.$$

Доведення. Зазначимо, що

$$\int_A |f|\,d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.2}{=} \int_{A\cap\{f\geq 0\}} |f|\,d\lambda + \int_{A\cap\{f<0\}} |f|\,d\lambda \overset{\text{Власт. } 2}{=}$$
$$\overset{\text{Власт. } 2}{=} \int_A |f|\mathbf{1}_{\{f\geq 0\}}\,d\lambda + \int_A |f|\mathbf{1}_{\{f<0\}}\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda + \int_A f_-\,d\lambda.$$

Далі маємо

$$f \in \mathsf{L}(A,\lambda) \Leftrightarrow \int_A f_+\, d\lambda < +\infty, \quad \int_A f_-\, d\lambda < +\infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_A f_+\, d\lambda + \int_A f_-\, d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \int_A |f|\, d\lambda < +\infty.$$

При цьому

$$\left|\int_A f\, d\lambda\right| = \left|\int_A f_+\, d\lambda - \int_A f_-\, d\lambda\right| \le \int_A f_+\, d\lambda + \int_A f_-\, d\lambda = \int_A |f|\, d\lambda\,. \quad \square$$

9. Якщо $f \sim g \pmod{\lambda}$, то $\int_A f\, d\lambda = \int_A g\, d\lambda$ (за умови, що хоча б один із цих інтегралів існує).

Доведення. Нехай $\mathsf{N} = \{x \in A: \; f(x) \ne g(x)\}$, $\lambda(\mathsf{N}) = 0$. Тоді $f = g$ на $A \setminus \mathsf{N}$,

$$\int_A f_+\, d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.2}{=} \int_{A\setminus\mathsf{N}} f_+\, d\lambda + \int_{\mathsf{N}} f_+\, d\lambda \overset{\text{Власт. } 1}{=} \int_{A\setminus\mathsf{N}} f_+\, d\lambda =$$
$$= \int_{A\setminus\mathsf{N}} g_+\, d\lambda = \int_{A\setminus\mathsf{N}} g_+\, d\lambda + \int_{\mathsf{N}} g_+\, d\lambda = \int_A g_+\, d\lambda\,.$$

Аналогічно $\int_A f_-\, d\lambda = \int_A g_-\, d\lambda$. $\square$

10. Якщо $f \in \mathsf{L}(A,\lambda)$, то $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ на A.

Доведення. Припустимо, що

$$\lambda\big(\{x \in A: \; |f(x)| = +\infty\}\big) = \varepsilon > 0.$$

Тоді для кожного $n \ge 1$ маємо

$$\int_A |f|\, d\lambda \overset{\text{Власт. } 5}{\ge} \int_{A\cap\{|f|\ge n\}} |f|\, d\lambda \overset{\text{Власт. } 4}{\ge}$$
$$\overset{\text{Власт. } 4}{\ge} \int_{A\cap\{|f|\ge n\}} n\, d\lambda = n\lambda\big(A \cap \{|f| \ge n\}\big) \ge n\varepsilon\,.$$

Оскільки n — довільне, то

$$\int_A |f|\, d\lambda = +\infty \Rightarrow |f| \notin \mathsf{L}(A,\lambda) \overset{\text{Власт. } 8}{\Longrightarrow} f \notin \mathsf{L}(A,\lambda)\,. \quad \square$$

11. Якщо $f(x) \ge 0$ і $\int_A f\, d\lambda = 0$, то $f = 0 \pmod{\lambda}$ на A.

Доведення. Для кожного $n \geq 1$ маємо

$$0 = \int_A f\,d\lambda \overset{\text{Власт. 5}}{\geq} \int_{A\cap\{f\geq(1/n)\}} f\,d\lambda \overset{\text{Власт. 4}}{\geq}$$
$$\overset{\text{Власт. 4}}{\geq} \int_{A\cap\{f\geq(1/n)\}} \frac{1}{n}\,d\lambda = \frac{1}{n}\lambda\Big(A\cap\Big\{f\geq\frac{1}{n}\Big\}\Big).$$

Тому $\lambda\big(A\cap\{f\geq(1/n)\}\big)=0$, і з неперервності міри знизу ми отримуємо

$$\Big(A\cap\Big\{f\geq\frac{1}{n}\Big\}\Big)\uparrow\big(A\cap\{f>0\}\big),\quad n\to\infty\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lambda\big(A\cap\{f>0\}\big)=\lim_{n\to\infty}\lambda\Big(A\cap\Big\{f\geq\frac{1}{n}\Big\}\Big)=0. \qquad \square$$

12. Якщо $\int_A f\,d\lambda = 0$ для всіх $A\in\mathcal{F}$, то $f=0 \pmod{\lambda}$ на X.

Доведення. Використовуючи умову для множин $A=\{f\geq 0\}$ і $A=\{f<0\}$, властивість 11 для f_+ і f_-, маємо

$$\int_{\mathsf{X}} f_+\,d\lambda = \int_{\mathsf{X}} f\mathbf{1}_{\{f\geq0\}}\,d\lambda = \int_{\{f\geq0\}} f\,d\lambda = 0 \Rightarrow f_+ = 0 \pmod{\lambda},$$
$$\int_{\mathsf{X}} f_-\,d\lambda = \int_{\mathsf{X}}(-f)\mathbf{1}_{\{f<0\}}\,d\lambda = \int_{\{f<0\}}(-f)\,d\lambda =$$
$$= -\int_{\{f<0\}} f\,d\lambda = 0 \Rightarrow f_- = 0 \pmod{\lambda},$$
$$f = f_+ - f_- = 0 \pmod{\lambda}. \qquad \square$$

4.5. Лінійність інтеграла

Теорема 4.3. *Нехай $A\in\mathcal{F}$, $f,\ g:\mathsf{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ — вимірні функції.*

1) *Якщо f і g невід'ємні, то*

$$\int_A (f+g)\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_A g\,d\lambda. \tag{4.14}$$

2) *Якщо $f,\ g\in\mathsf{L}(A,\lambda)$, то $f+g\in\mathsf{L}(A,\lambda)$, і при цьому справджується* (4.14).

Доведення. 1) Спочатку розглянемо випадок, коли f і g — прості невід'ємні,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{1}_{A_k}(x),\quad g(x)=\sum_{i=1}^{j} b_i\mathbf{1}_{B_i}(x),\quad A_k,\ B_i\in\mathcal{F},$$

при цьому $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{i=1}^{j} B_i = X$, і в кожному з об'єднань множини неперетинні. Тоді

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{j} \big(A_k \cap B_i\big), \quad B_i = \bigcup_{k=1}^{n} \big(A_k \cap B_i\big) \Rightarrow \tag{4.15}$$

$$\Rightarrow \mathbf{1}_{A_k}(x) = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x), \quad \mathbf{1}_{B_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x).$$

Ми можемо записати f і g з одним і тим самим набором множин в індикаторах:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_k \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x).$$

Далі маємо

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \big(a_k + b_i\big) \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x),$$

$$\begin{aligned}
\int_A (f+g)\,d\lambda &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \big(a_k + b_i\big) \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_k \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda\big(A_k \cap B_i \cap A\big) \overset{(4.15)}{=} \\
&\overset{(4.15)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\big(A_k \cap A\big) + \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda\big(B_i \cap A\big) = \int_A f\,d\lambda + \int_A g\,d\lambda\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Якщо f і g — довільні невід'ємні вимірні функції, то, за теоремою 3.6, знайдуться послідовності простих невід'ємних функцій

$$f_r(x) \uparrow f(x), \quad g_r(x) \uparrow g(x), \quad r \to \infty.$$

Тоді

$$f_r(x) + g_r(x) \uparrow f(x) + g(x), \quad r \to \infty, \quad f_r + g_r \ - \ \text{прості функції}.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\int_A (f+g)\,d\lambda &\overset{\text{Теорема } 4.1}{=} \lim_{r\to\infty} \int_A \big(f_r + g_r\big)\,d\lambda \overset{(4.16)}{=} \\
&\overset{(4.16)}{=} \lim_{r\to\infty} \Big(\int_A f_r\,d\lambda + \int_A g_r\,d\lambda\Big) \overset{\text{Теорема } 4.1}{=} \int_A f\,d\lambda + \int_A g\,d\lambda\,.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

2) Використовуючи умови $f,\ g \in \mathsf{L}(A,\lambda)$, отримуємо

$$\int_A |f+g|d\lambda \overset{\text{Власт. } 4}{\leq} \int_A \big(|f|+|g|\big)d\lambda \overset{(4.17)}{=}$$
$$\overset{(4.17)}{=} \int_A |f|d\lambda + \int_A |g|d\lambda \overset{\text{Власт. } 8}{<} +\infty \quad \Rightarrow \quad f+g \in \mathsf{L}(A,\lambda).$$

Спочатку припустимо, що

$$f(x) \geq 0,\ g(x) < 0,\ x \in A.$$

Розглянемо множини

$$A_+ = \big\{x \in A:\ f(x)+g(x) \geq 0\big\},$$
$$A_- = \big\{x \in A:\ f(x)+g(x) < 0\big\}.$$

На A_+ невід'ємними є функції $f+g,\ f,\ (-g)$, тому маємо рівність

$$f = (f+g)+(-g).$$

Використовуючи доведене вище твердженням 1) нашої теореми, отримуємо

$$\int_{A_+} fd\lambda = \int_{A_+}(f+g)d\lambda + \int_{A_+}(-g)d\lambda \overset{\text{Власт. } 3}{=} \int_{A_+}(f+g)d\lambda - \int_{A_+} gd\lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{A_+}(f+g)\,d\lambda = \int_{A_+} f\,d\lambda + \int_{A_+} g\,d\lambda\,. \tag{4.18}$$

Аналогічно на A_- використовуємо рівність

$$-g = f + (-f-g),$$

і знаходимо

$$\int_{A_-}(-g)\,d\lambda = \int_{A_-} f\,d\lambda + \int_{A_-}(-f-g)\,d\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_{A_-}(f+g)\,d\lambda = \int_{A_-} f\,d\lambda + \int_{A_-} g\,d\lambda\,. \tag{4.19}$$

Додаючи (4.18) і (4.19) та використовуючи властивість 7, отримуємо (4.14) у цьому випадку.

У загальному випадку ми розглядаємо чотири неперетинні множини

$$A_{++} = \big\{x \in A:\ f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0\big\},$$
$$A_{+-} = \big\{x \in A:\ f(x) \geq 0,\ g(x) < 0\big\},$$
$$A_{-+} = \big\{x \in A:\ f(x) < 0,\ g(x) \geq 0\big\},$$
$$A_{--} = \big\{x \in A:\ f(x) < 0,\ g(x) < 0\big\}.$$

Із доведеного вище випливає, що для кожної такої множини $A_{\pm\pm}$ справджується

$$\int_{A_{\pm\pm}} (f+g)\, d\lambda = \int_{A_{\pm\pm}} f\, d\lambda + \int_{A_{\pm\pm}} g\, d\lambda\,.$$

Сума цих чотирьох рівностей та властивість 7 дають нам (4.14). □

4.6. Граничні теореми для інтеграла

У цьому підрозділі ми розглянемо набір тверджень, що пов'язують

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n\, d\lambda \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,.$$

Як і раніше, $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — вимірний простір з мірою, $A \in \mathcal{F}$.

Теорема 4.4 (теорема про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності). *Нехай* $f_n : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — *невід'ємні вимірні функції такі, що*

$$\forall x,\ n:\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

Покладемо $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Тоді*

$$\int_A f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,. \tag{4.20}$$

Доведення. Функція f визначена як границя монотонної послідовності, усі записані інтеграли існують як інтеграли від невід'ємних вимірних функцій.

Для кожної f_n візьмемо послідовність простих невід'ємних вимірних функцій $p_{nr} \uparrow f_n$, $r \geq 1$, і розглянемо

$$\tilde{p}_j(x) = \max_{1\leq n\leq j,\ 1\leq r\leq j} p_{nr}(x), \quad j \geq 1. \tag{4.21}$$

Тоді $\tilde{p}_j$ — також прості невід'ємні вимірні функції, $\tilde{p}_{j+1}(x) \geq \tilde{p}_j(x)$. Покажемо, що $\tilde{p}_j \uparrow f$.

З одного боку,

$$p_{nr}(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \quad \overset{(4.21)}{\Longrightarrow} \quad \tilde{p}_j(x) \leq f(x)\,.$$

З іншого боку, для $j \geq m$ виконується

$$\tilde{p}_j(x) \geq p_{mj}(x) \overset{j\to\infty}{\Longrightarrow} \lim_{j\to\infty} \tilde{p}_j(x) \geq \lim_{j\to\infty} p_{mj}(x) = f_m(x) \overset{m\to\infty}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{m\to\infty}{\Longrightarrow} \lim_{j\to\infty} \tilde{p}_j(x) \geq \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)\,. \tag{4.22}$$

У (4.21) маємо, що $p_{nr}(x) \le f_n(x) \le f_j(x)$. Тому

$$\tilde{p}_j(x) \le f_j(x) \le f(x) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \tilde{p}_j(x) \le f(x) \overset{(4.22)}{\Longrightarrow} \lim_{j\to\infty} \tilde{p}_j(x) = f(x).$$

Також із властивості 4 випливає

$$\int_A \tilde{p}_j \, d\lambda \le \int_A f_j \, d\lambda \le \int_A f \, d\lambda.$$

За теоремою 4.1,

$$\int_A \tilde{p}_j \, d\lambda \to \int_A f \, d\lambda, \quad j \to \infty.$$

Звідси отримуємо (4.20). □

Наслідок 4.1 (наслідок про інтегрування функціонального ряду). *Нехай $g_k : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — невід'ємні вимірні функції. Тоді*

$$\int_A \Big(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Big) \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_k \, d\lambda \, .$$

Доведення. Функції

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

задовольняють умови теореми 4.4. Маємо

$$\int_{\mathsf{X}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Big) \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} \Big(\sum_{k=1}^{n} g_k \Big) \, d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.3}{=}$$

$$\overset{\text{Теорема } 4.3}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathsf{X}} g_k \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathsf{X}} g_k \, d\lambda \, . \quad \square$$

Теорема 4.5 (теорема Бепо Леві). *Нехай функції $f_n \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$ такі, що*

1) $\forall x, \ n : \ f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$;
2) $\sup\limits_{n\ge 1} \int_{\mathsf{X}} f_n \, d\lambda < +\infty$.

Покладемо $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Тоді

$$\int_A f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda \, .$$

Доведення. Розглянемо функції

$$g_n = f_n - f_1, \quad g = f - f_1.$$

Тоді $g_n \geq 0$, $g_n \uparrow g$, і використовуючи теореми 4.4 і 4.3, маємо

$$\int_A g\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda - \int_A f_1\, d\lambda\,. \tag{4.23}$$

З умови 2) теореми випливає, що $\int_A g\, d\lambda < +\infty$, тому

$$\int_A g\, d\lambda < +\infty \quad \Rightarrow \quad g \in \mathsf{L}(A,\lambda) \quad \Rightarrow \quad f = g + f_1 \in \mathsf{L}(A,\lambda).$$

Використовуємо для цих функцій теорему 4.3 про лінійність інтеграла, і отримуємо

$$\int_A g\, d\lambda = \int_A f\, d\lambda - \int_A f_1\, d\lambda \overset{(4.23)}{\Longrightarrow} \int_A f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,. \qquad \square$$

Теорема 4.6 (теорема Фату). *Нехай $f_n : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — невід'ємні вимірні функції. Тоді*

$$\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\, d\lambda \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,. \tag{4.24}$$

Доведення. Використаємо відоме зображення нижньої границі

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x)\,.$$

Розглянемо функції

$$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x), \quad g_n(x) \geq 0, \quad g_n \uparrow \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k.$$

Тоді

$$\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\, d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.4}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\lambda =$$
$$= \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\lambda \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,.$$

В останній нерівності ми використали, що $g_n \leq f_n$. $\square$

Теорема 4.7 (теорема Лебега про мажоровану збіжність). *Нехай $f,\ f_n : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — вимірні функції такі, що*

1) $f_n \in \mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$;
2) $f_n \to f \pmod{\lambda}$;
3) $\exists g \in \mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda) :\ |f_n| \leq g \pmod{\lambda}$.

Тоді $f_n \in \mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$, і

$$\int_A f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,.$$

Доведення. З умов 2) і 3) випливає, що $|f| \le g \pmod{\lambda}$. Тому

$$\int_X |f|\, d\lambda \le \int_X g\, d\lambda < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)\,.$$

Також використовуючи умову 3), дістаємо

$$g + f_n \ge 0 \pmod{\lambda}, \quad g - f_n \ge 0 \pmod{\lambda},$$

тоді можемо до цих інтегровних функцій застосувати теорему Фату і теорему про лінійність інтеграла. Нагадаємо, що за властивістю 9, ми можемо нехтувати значеннями функцій на множині міри 0. Маємо

$$\int_A (g+f)\, d\lambda = \int_A \underline{\lim}_{\,n\to\infty} (g + f_n)\, d\lambda \overset{(4.24)}{\le}$$
$$\overset{(4.24)}{\le} \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A (g+f_n)\, d\lambda = \int_A g\, d\lambda + \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_A f\, d\lambda \le \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda\,. \tag{4.25}$$

Аналогічно отримуємо

$$\int_A (g-f)\, d\lambda = \int_A \underline{\lim}_{\,n\to\infty} (g - f_n)\, d\lambda \overset{(4.24)}{\le}$$
$$\overset{(4.24)}{\le} \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A (g-f_n)\, d\lambda = \int_A g\, d\lambda + \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \Big(-\int_A f_n\, d\lambda\Big) =$$
$$= \int_A g\, d\lambda - \overline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_A f\, d\lambda \ge \overline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda \tag{4.26}$$

(тут ми використали таку властивість: $\underline{\lim}_{\,n\to\infty}(-a_n) = -\overline{\lim}_{\,n\to\infty} a_n$). Ураховуючи, що нижня границя послідовності не може перевищувати верхню, із (4.25) і (4.26) отримуємо

$$\underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda = \overline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda = \int_A f\, d\lambda\,. \quad \square$$

Наслідок 4.2. *Твердження теореми 4.7 залишається вірним, якщо в ньому умову* 2) *замінити на умову*

2') $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Доведення. Припустимо, що $\int_A f_n\, d\lambda \not\to \int_A f\, d\lambda$. Тоді знайдеться $\varepsilon_0 > 0$ і підпослідовність n_k така, що для всіх $k \ge 1$

$$\Big|\int_A f_{n_k}\, d\lambda - \int_A f\, d\lambda\Big| \ge \varepsilon_0\,. \tag{4.27}$$

За теоремою Ріса (наслідок 3.6), існує підпідпослідовність $f_{n_{k_i}} \to f \pmod{\lambda}$, $i \to \infty$. Тоді з теореми 4.7 випливає

$$\int_A f_{n_{k_i}}\, d\lambda \to \int_A f\, d\lambda, \quad i \to \infty,$$

і це суперечить (4.27). □

Приклад 4.2. Розглянемо таку послідовність функцій на $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x),\ n \geq 1.$$

Тоді відносно міри Лебега λ_1 виконується

$$f_n \to 0 \text{ м. с.}, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda_1 = 1,$$

тому маємо

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, d\lambda_1 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda_1 = 1.$$

Ми бачимо, що в теоремі 4.4 не можна відкинути умову монотонності, нерівність у (4.24) може бути строгою, і в теоремі 4.7 умова мажорованості є істотною.

4.7. Порівняння інтеграла Лебега та інтеграла Рімана

Основна мета даного підрозділу — показати, що інтеграл Лебега за мірою Лебега λ_1 є узагальненням *інтеграла Рімана*.

Обмежимося випадком інтеграла по множині $[a,b] \subset \mathbb{R}$, аналогічним чином можна розглядати інтеграли по підмножинах $\mathbb{R}^d$. Для інтеграла Рімана по даному відрізку вживатимемо позначення $\int_a^b f\, dx$, для інтеграла Лебега за λ_1 — $\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1$. Використовуватимемо стандартні властивості інтеграла Рімана, наведені, наприклад, у [7, розділ 6].

Теорема 4.8. *Нехай функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна за Ріманом на $[a,b]$. Тоді f інтегровна за Лебегом на $[a,b]$ (відносно міри Лебега λ_1), і*

$$\int_a^b f\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 .$$

Доведення. Оскільки f інтегровна за Ріманом, вона обмежена. Позначимо $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Для $n \geq 1$ візьмемо набір точок π_n, що ділять відрізок $[a,b]$ на 2^n рівних частин:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2^n} = b, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{2^n},$$

і позначимо

$$m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \quad 0 \le k \le 2^n - 1\,.$$

Розглянемо функції

$$\underline{f}_{\,n}(x) = f(a)\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \mathbf{1}_{(x_k,x_{k+1}]}(x),$$
$$\overline{f}_n(x) = f(a)\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \mathbf{1}_{(x_k,x_{k+1}]}(x)\,.$$

Зазначимо, що для всіх n, x

$$\underline{f}_{\,n}(x) \le \underline{f}_{\,n+1}(x), \quad \overline{f}_n(x) \ge \overline{f}_{n+1}(x)\,,$$

оскільки кожне розбиття π_{n+1} є подрібненням π_n. Тому визначеними є функції

$$\underline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_{\,n}(x), \quad \overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_{\,n}(x)\,.$$

Також зазначимо, що

$$\underline{f}_{\,n}(x) \le f(x) \le \overline{f}_n(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(x) \le f(x) \le \overline{f}(x). \tag{4.28}$$

Функції $\underline{f}_{\,n}$, $\overline{f}_n$, $\underline{f}$, $\overline{f}$ вимірні за Лебегом. Оскільки ці функції обмежені (їх значення за абсолютною величиною не перевищують M), вони інтегровні за Лебегом на $[a,b]$ відносно λ_1. Маємо, що

$$\int_{[a,b]} \underline{f}\, d\lambda_1 \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_{\,n}\, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \Delta x_k \overset{(**)}{=} \int_a^b f\, dx\,, \tag{4.29}$$
$$\int_{[a,b]} \overline{f}\, d\lambda_1 \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \overline{f}_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \Delta x_k \overset{(**)}{=} \int_a^b f\, dx$$

(тут рівності (*) випливають із теореми Лебега про мажоровану збіжність, рівності (**) — з інтегровності f за Ріманом, значення інтеграла Рімана дорівнює границям нижньої та верхньої сум Дарбу). Звідси отримуємо

$$\int_{[a,b]} \big(\overline{f} - \underline{f}\,\big)\, d\lambda_1 = \int_{[a,b]} \overline{f}\, d\lambda_1 - \int_{[a,b]} \underline{f}\, d\lambda_1 = 0\,.$$

Властивість 11 свідчить про те, що

$$\underline{f} = \overline{f} \pmod{\lambda_1} \overset{(4.28)}{\Longrightarrow} \underline{f} = f \pmod{\lambda_1}\,. \tag{4.30}$$

Нагадаємо, що міра λ_1 — повна, і, за теоремою 3.7, f є вимірною за Лебегом. Оскільки $|f| \le M$, то $f \in \mathsf{L}\big([a,b],\lambda_1\big)$. Також

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda_1 \overset{(4.30)}{=} \int_{[a,b]} \underline{f}\,d\lambda_1 \overset{(4.29)}{=} \int_a^b f\,dx\,. \qquad \square$$

Теорема 4.8 дає метод обчислення інтеграла $\int_{[a,b]} f\,d\lambda_1$ для широкого класу функцій. Якщо f інтегровна за Ріманом, достатньо знайти $\int_a^b f\,dx$, що і дасть нам значення інтеграла Лебега.

Далі розглянемо *невласний інтеграл Рімана* по множині $[a,+\infty) \subset \mathbb{R}$.

Теорема 4.9. *Нехай функція* $f:\ [a,+\infty) \subset \mathbb{R}$ *інтегровна за Ріманом на будь-якому відрізку* $[a,b]$*,* $b > a$*.*

1) *Якщо* f *абсолютно інтегровна за Ріманом у невласному сенсі на* $[a,+\infty)$*, то* $f \in \mathsf{L}\big([a,+\infty),\lambda_1\big)$*, і при цьому*

$$\int_a^{+\infty} f\,dx = \int_{[a,+\infty)} f\,d\lambda_1\,.$$

2) *Якщо* f *не є абсолютно інтегровною за Ріманом у невласному сенсі на* $[a,+\infty)$*, то* $f \notin \mathsf{L}\big([a,+\infty),\lambda_1\big)$*.*

Доведення. За теоремою 4.8, звуження f на кожному відрізку $[a,a+n]$ є вимірним за Лебегом. Тому для кожної множини $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in [a,+\infty) : f(x) \in B\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{x \in [a,a+n] : f(x) \in B\big\} \in \mathcal{S}_1,$$

і функція f на $[a,+\infty)$ є вимірною за Лебегом. Також маємо

$$|f(x)|\mathbf{1}_{[a,a+n]}(x) \uparrow |f(x)|, \quad n \to \infty, \quad x \in [a,+\infty),$$

і тому

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,+\infty)} |f|\,d\lambda_1 \overset{\text{Теорема } 4.4}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} |f|\mathbf{1}_{[a,a+n]}\,d\lambda_1 = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} |f|\,d\lambda_1 \overset{\text{Теорема } 4.8}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} |f|\,dx = \int_a^{+\infty} |f|\,dx\,. \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Тепер розглянемо безпосередньо твердження 1) і 2) теореми.

1) У цьому випадку

$$\int_a^{+\infty} |f|\,dx < +\infty \quad \overset{(4.31)}{\Longrightarrow} \quad f \in \mathsf{L}\big([a,+\infty),\lambda_1\big).$$

Ми використаємо теорему 4.7 про мажоровану збіжність для послідовності функцій $f\mathbf{1}_{[a,a+n]}$ з інтегровною мажорантою $|f|$, і матимемо

$$\int_{[a,+\infty)} f\,d\lambda_1 \overset{\text{Теорема } 4.7}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{[a,+\infty)} f\mathbf{1}_{[a,a+n]}\,d\lambda_1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{[a,a+n]} f\,d\lambda_1 \overset{\text{Теорема } 4.8}{=} \lim_{n\to\infty}\int_a^{a+n} f\,dx = \int_a^{+\infty} f\,dx\,.$$

2) У цьому випадку

$$\int_a^{+\infty}|f|\,dx = +\infty \quad \overset{(4.31)}{\Longrightarrow} \quad f \notin \mathsf{L}\big([a,+\infty),\lambda_1\big). \qquad \square$$

Надалі для інтегровної за Ріманом функції f ми можемо розглядати інтеграл від f як у сенсі Рімана, так і в сенсі Лебега — як нам зручніше.

Приклад 4.3. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin^n x\,dx\,.$$

Підінтегральні функції абсолютно інтегровні за Ріманом на $[0,+\infty)$, і тому ці інтеграли можна брати в сенсі Лебега. Для інтегралів у сенсі Лебега використаємо теорему про мажоровану збіжність, при цьому $e^{-x}\sin^n x \to 0 \pmod{\lambda_1}$. Так отримуємо

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sin^n x\,dx \overset{\text{Теорема } 4.9}{=} \int_{[0,\infty)} e^{-x}\sin^n x\,d\lambda_1 \overset{\text{Теорема } 4.7}{\longrightarrow} 0, \quad n\to\infty\,.$$

Далі розглянемо зв'язок *інтеграла Рімана–Стілтьєса* $\int_a^b f\,dF$ (див., наприклад, [7, підрозділ 9.3]) й *інтеграла Лебега–Стілтьєса* $\int_{[a,b]} f\,d\lambda_F$.

Приклад 4.4. Розглянемо

$$f(x) = F(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x).$$

Нескладно перевірити, що

$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda_F = 1\cdot\lambda_F([0,1]) = 1\,.$$

Інтеграл Рімана–Стілтьєса для неперервних на цьому відрізку функцій f, F дорівнює границі інтегральних сум,

$$\int_a^b f\,dF = \lim_{\max|x_{k+1}-x_k|\to 0}\sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_k)\big(F\big(x_{k+1}\big)-F\big(x_k\big)\big) = 0,$$
$$0 = x_0 < x_1 \cdots < x_{k_n} = 1\,.$$

Ми бачимо, що твердження теореми 4.8 перенести на цей випадок без змін не можна.

Теорема 4.10. *Нехай функція* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *неперервна на* $[a,b]$, *функція* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *неспадна і неперервна справа. Тоді*

$$\int_a^b f\,dF = \int_{(a,b]} f\,d\lambda_F\,. \tag{4.32}$$

Доведення. Міра λ_F визначена згідно з підрозділом 2.6, обидва записані в (4.32) інтеграли існують, оскільки f неперервна і борельова. Також f обмежена, позначимо $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Для довільного розбиття $0 = x_0 < x_1 \cdots < x_{k_n} = 1$ розглянемо функцію

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_k)\mathbf{1}_{(x_k,x_{k+1}]}(x)\,.$$

Оскільки f неперервна,

$$f_n(x) \to f(x), \quad \max|x_{k+1} - x_k| \to 0,$$

для кожного $x \in [a,b]$. Також $|f_n(x)| \le M$. Маємо

$$\int_{(a,b]} f\,d\lambda_F \overset{(*)}{=} \lim_{\max|x_{k+1}-x_k|\to 0} \int_{(a,b]} f_n\,d\lambda_F \overset{(**)}{=}$$
$$\overset{(**)}{=} \lim_{\max|x_{k+1}-x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_k)\big(F\big(x_{k+1}\big) - F\big(x_k\big)\big) \overset{(***)}{=} \int_a^b f\,dF\,.$$

Тут рівність (*) випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність, у (**) ми знайшли інтеграл від простої функції f_n, користуючись лінійністю інтеграла, у (***) ми маємо рівність інтеграла Рімана–Стілтьєса границі відповідних інтегральних сум. □

4.8. Критерій Лебега інтегровності за Ріманом на $[a,b]$

У цьому підрозділі використовуватимемо позначення і деякі міркування з доведення теореми 4.8. Почнемо з допоміжного твердження.

Лема 4.2. *Нехай функція* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *обмежена,* $z \in [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n$. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) f *неперервна в* z;
2) $\underline{f}(z) = \overline{f}(z)$.

Доведення. $1) \Rightarrow 2)$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Із неперервності f у z випливає

$$\exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : \ |x - z| \leq 2^{-n}(b-a) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(z)| \leq \varepsilon\,.$$

Якщо в поділі π_n точка z належить інтервалу $(x_k, x_{k+1}]$ завдовжки $2^{-n}(b-a)$, то

$$\forall\, x \in [x_k, x_{k+1}] : \ |f(x) - f(z)| \leq \varepsilon\,. \tag{4.33}$$

Оскільки

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)\,, \tag{4.34}$$

і це є значення $\underline{f}_{\,n}(z)$ і $\overline{f}_{\,n}(z)$, із (4.33) маємо

$$\begin{gathered} |m_k - f(z)| \leq \varepsilon, \quad |M_k - f(z)| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad |\underline{f}_{\,n}(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \quad |\overline{f}_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \\ \underline{f}_{\,n}(z) \leq \underline{f}(z) \leq f(z) \leq \overline{f}(z) \leq \overline{f}_n(z) \Rightarrow \overline{f}(z) - \underline{f}(z) \leq 2\varepsilon. \end{gathered}$$

З огляду на те, що $\varepsilon > 0$ — довільне, одержимо $\underline{f}(z) = \overline{f}(z)$.

$2) \Rightarrow 1)$. Маємо

$$\underline{f}(z) = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_{\,n}(z), \quad \overline{f}(z) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_{\,n}(z), \quad \underline{f}(z) = \overline{f}(z).$$

Тому для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $n \geq 1$ таке, що

$$\overline{f}_{\,n}(z) - \underline{f}_{\,n}(z) < \varepsilon. \tag{4.35}$$

Для цього n візьмемо відповідний поділ π_n, і нехай $z \in (x_k, x_{k+1}]$. Рівність (4.35) означає, що

$$M_k - m_k < \varepsilon. \tag{4.36}$$

Оскільки $z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n$, то z — внутрішня точка інтервалу $(x_k, x_{k+1}]$, тому знайдеться окіл

$$(z - \delta, z + \delta) \subset (x_k, x_{k+1}], \quad \delta > 0\,.$$

Із (4.36) і (4.34) випливає, що для будь-якої точки x із цього околу

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon\,. \tag{4.37}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми можемо знайти окіл точки z, у якому справджується (4.37). Це й означає неперервність f у z. $\square$

Теорема 4.11 (критерій Лебега інтегровності за Ріманом). *Нехай функція* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *обмежена. Наступні твердження еквівалентні:*

1) f *інтегровна за Ріманом на* $[a,b]$;
2) $\lambda_1\big(\{z \in [a,b] : \ f$ *розривна в* $z\}\big) = 0$.

Доведення. $1) \quad \Rightarrow \quad 2)$. Для інтегровної за Ріманом f при доведенні теореми 4.8 отримано $\underline{f} = \overline{f} \pmod{\lambda_1}$ згідно з рівністю (4.30). Значить, для всіх $z \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n$, крім множини нульової міри, ми можемо використати твердження $2) \ \Rightarrow \ 1)$ з леми 4.2 і отримати неперервність f у всіх цих z. Також $\lambda_1\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\pi_n\big) = 0$ як міра Лебега зліченної множини, і тому неперервність f може порушуватися лише на множині нульової міри.

$2) \ \Rightarrow \ 1)$. Тут для всіх $z \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n$, крім множини нульової міри, можемо використати твердження $1) \ \Rightarrow \ 2)$ з леми 4.2 і отримати в цих точках $\underline{f}(z) = \overline{f}(z)$. Нагадаємо, що

$$\underline{f}(z) = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n(z), \quad \overline{f}(z) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(z)\,.$$

Усі ці функції вимірні за Лебегом і обмежені (їх значення за модулем не перевищують $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$), тому вони інтегровні за Лебегом на $[a,b]$ відносно λ_1. Використовуючи теорему про мажоровану збіжність, маємо

$$\int_{[a,b]} \underline{f}\, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n\, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \Delta x_k\,,$$

$$\int_{[a,b]} \overline{f}\, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \overline{f}_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \Delta x_k\,.$$

При цьому

$$\underline{f} \sim \overline{f} \pmod{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad \int_{[a,b]} \underline{f}\, d\lambda_1 = \int_{[a,b]} \overline{f}\, d\lambda_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \Delta x_k\,.$$

Ми отримали, що для деякої послідовності поділів π_n границі нижніх і верхніх сум Дарбу рівні. Тому f інтегровна за Ріманом на $[a,b]$. $\square$

4.9. Інтеграл, що залежить від параметра. Заміна змінної

Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — це деякий вимірний простір із мірою, T — довільна множина, і ми розглядаємо функцію

$$f:\ \mathsf{X}\times\mathsf{T}\to\overline{\mathbb{R}}\,.$$

Покладемо

$$I(t)=\int_{\mathsf{X}} f(x,t)\,d\lambda(x)$$

для всіх $t\in\mathsf{T}$, для яких цей інтеграл визначено.

Ми доведемо теореми про неперервність і диференційованість функції I.

Теорема 4.12. *Нехай* T *— метричний простір, і справджуються наступні умови:*

1) $f(x,\cdot)$ *неперервна на* T *для кожного* $x\in\mathsf{X}$;
2) $f(\cdot,t)$ $\mathcal{F}$*-вимірна для кожного* $t\in\mathsf{T}$;
3) $\bigl|f(x,t)\bigr|\le g(x)$ *для деякої функції* $g\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$.

Тоді I *неперервна на* T.

Доведення. З умов 2) і 3) випливає, що $f(\cdot,t)\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$ для всіх $t\in\mathsf{T}$, I визначена на T.

Для довільної послідовності $t_n\to t_0$ в T маємо

$$\forall\,x\in\mathsf{X}:\ f(x,t_n)\overset{\text{умова 1)}}{\to} f(x,t_0),\quad n\to\infty,$$

$$I(t_n)=\int_{\mathsf{X}} f(x,t_n)\,d\lambda(x)\overset{(*)}{\to}\int_{\mathsf{X}} f(x,t_0)\,d\lambda(x)=I(t_0)\,.$$

Тут в (*) ми застосували теорему про мажоровану збіжність і обмеженість $|f(x,t_n)|\le g(x)$. Таким чином, I неперервна в довільній точці t_0, а значить і на T. □

У наступному твердженні візьмемо $\mathsf{T}=G$, де G — деяка відкрита підмножина $\mathbb{R}$.

Теорема 4.13. *Нехай справджуються умови*:

1) $f(\cdot,t)\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$ *для кожного* $t\in G$;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *визначена на* $\mathsf{X}\times G$;
3) $\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\le g(x)$ *для деякої функції* $g\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$.

Тоді

$$\frac{dI(t)}{dt}=\int_{\mathsf{X}}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,d\lambda(x). \tag{4.38}$$

Доведення. Перевіримо рівність (4.38) у довільній точці $t_0 \in G$. Для довільної послідовності $t_n \to t_0$ в G розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(t_n) - I(t_0)}{t_n - t_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t_0} \Big(\int_{\mathsf{X}} f(x, t_n)\, d\lambda(x) - \int_{\mathsf{X}} f(x, t_0)\, d\lambda(x) \Big) \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}\, d\lambda(x) \tag{4.39}$$

(тут у рівності (*) ми використали лінійність інтеграла для інтегровних функцій $f(x, t_n)$, $f(x, t_0)$).

Із умови 2) випливає, що для кожного $x \in \mathsf{X}$

$$\frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \to \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \quad n \to \infty.$$

Із формули Лагранжа отримуємо, що для деякої $t^* \in G$

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f(x, t^*)}{\partial t} \right| \overset{\text{умова 3)}}{\leq} g(x).$$

Тому за теоремою про мажоровану збіжність, застосованою до інтеграла в (4.39), дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(t_n) - I(t_0)}{t_n - t_0} = \int_{\mathsf{X}} \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t}\, d\lambda(x),$$

що й означає виконання (4.38) у точці t_0. □

Далі розглянемо заміну міри в інтегралі. Нехай дано ще один вимірний простір $(\mathsf{X}', \mathcal{F}')$ і довільне відображення $T : \mathsf{X} \to \mathsf{X}'$, що є $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-вимірним. Маємо

$$\forall A \in \mathcal{F}' : \ T^{-1}A \in \mathcal{F},$$

і ми можемо визначити функцію множин λ' на $\mathcal{F}'$ за правилом

$$\lambda'(A) = \lambda\big(T^{-1}A\big). \tag{4.40}$$

Тоді λ' — це міра на $\mathcal{F}'$. Дійсно, для неперетинних $A_n \in \mathcal{F}'$ знайдемо

$$\lambda'\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lambda\Big(T^{-1} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \overset{(*)}{=} \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}A_n\Big) \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(T^{-1}A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda'\big(A_n\big)\,.$$

Тут у рівності (*) використано стандартну властивість прообразів множин. При цьому множини $T^{-1}A_n$ також є неперетинними, і тому справджується (**).

Наступне твердження показує зв'язок між інтегралами за λ і за λ'.

Теорема 4.14. *Нехай функція* $f : \mathsf{X}' \to \overline{\mathbb{R}}$ — $\mathcal{F}'$*-вимірна. Тоді*

$$\int_{\mathsf{X}} f\big(Tx\big)\, d\lambda(x) = \int_{\mathsf{X}'} f\big(x'\big)\, d\lambda'(x') \tag{4.41}$$

(якщо існує один із цих інтегралів, то існує й інший, і вони рівні).

Доведення. Зазначимо, що функція $f\big(Tx\big) : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$-вимірна як суперпозиція вимірних.

Крок 1. Нехай $f(x') = \mathbf{1}_A(x')$, $A \in \mathcal{F}'$. Тоді

$$f\big(Tx\big) = \mathbf{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & Tx \in A, \\ 0, & Tx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in T^{-1}A, \\ 0, & x \notin T^{-1}A \end{cases} = \mathbf{1}_{T^{-1}A}(x)\,.$$

Маємо

$$\int_{\mathsf{X}} f\big(Tx\big)\, d\lambda(x) = \lambda\big(T^{-1}A\big),$$
$$\int_{\mathsf{X}'} f\big(x'\big)\, d\lambda'(x') = \lambda'(A),$$
$$\lambda\big(T^{-1}A\big) \overset{(4.40)}{=} \lambda'(A),$$

і тому (4.41) справджується.

Крок 2. Нехай

$$f(x') = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x'), \quad A_k \in \mathcal{F}', \quad a_k \geq 0.$$

Як показано в кроці 1, для кожної функції $\mathbf{1}_{A_k}(x')$ справджується (4.41). Домноживши кожну з цих рівностей на відповідну a_k і додавши, ми отримаємо (4.41) для даної f (нагадаємо, що для невід'ємних функцій лінійність інтеграла виконується).

Крок 3. Нехай функція f — невід'ємна $\mathcal{F}'$-вимірна. Візьмемо прості невід'ємні $\mathcal{F}'$-вимірні функції

$$p_n : \mathsf{X}' \to \mathbb{R}, \quad p_n(x') \uparrow f(x').$$

Тоді $p_n(Tx) \uparrow f(Tx)$, за кроком 2

$$\int_{\mathsf{X}} p_n\big(Tx\big)\, d\lambda(x) = \int_{\mathsf{X}'} p_n\big(x'\big)\, d\lambda'(x').$$

Узявши границю при $n \to \infty$ і використавши в обох частинах рівності теорему про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності, отримаємо (4.41) для вказаної f.

Крок 4. Нехай функція f — довільна $\mathcal{F}'$-вимірна. Тоді

$$\big(f(Tx)\big)_+ = f_+(Tx), \quad \big(f(Tx)\big)_- = f_-(Tx).$$

Із кроку 3 випливає

$$\int_{\mathsf{X}} f_+\big(Tx\big)\, d\lambda(x) = \int_{\mathsf{X}'} f_+\big(x'\big)\, d\lambda'(x'),$$
$$\int_{\mathsf{X}} f_-\big(Tx\big)\, d\lambda(x) = \int_{\mathsf{X}'} f_-\big(x'\big)\, d\lambda'(x')$$

(зокрема, якщо скінченний хоча б один з інтегралів у лівих частинах рівностей, то скінченний і відповідний інтеграл у правій частині, і навпаки). Віднімаючи тут від першої рівності другу, матимемо (4.41). □

Приклад 4.5. Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це деякий імовірнісний простір, $(\mathsf{X}', \mathcal{F}') = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$, як відображення $T : \mathsf{X} \to \mathsf{X}'$ візьмемо довільну випадкову величину $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

У цьому випадку λ' визначена на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ так, що

$$\lambda'((-\infty, a)) = \mathsf{P}(\xi^{-1}((-\infty, a))) = \mathsf{P}\big(\xi < a\big) = F_\xi(a),$$

де F_ξ позначає функцію розподілу ξ. Інтеграл за цією мірою часто позначають як інтеграл за dF_ξ (він збігається з інтегралом за мірою Лебега–Стілтьєса, породженою функцією $F(a) = F_\xi(a+)$).

Для довільної борельової функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у цьому випадку маємо

$$\int_{\mathsf{X}} f\big(Tx\big)\, d\lambda(x) = \int_{\Omega} f(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) \overset{\text{Теорема } 4.14}{=}$$
$$\overset{\text{Теорема } 4.14}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x')\, d\lambda'(x') = \int_{\mathbb{R}} f(x')\, dF_\xi(x')\,.$$

Так ми отримали відому формулу для підрахунку математичного сподівання

$$\mathsf{E} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x')\, dF_\xi(x')\,.$$

Вправи

Вправа 4.1. Довести, що коли $f \in \mathsf{L}(A, \lambda)$ і $f \in \mathsf{L}(B, \lambda)$, то $f \in \mathsf{L}(A \cup B, \lambda)$.

Вправа 4.2. Нехай функція $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$-вимірна, λ і μ — міри на $\mathcal{F}$. Довести, що

$$\int_{\mathsf{X}} f \, d(\lambda + \mu) = \int_{\mathsf{X}} f \, d\lambda + \int_{\mathsf{X}} f \, d\mu,$$

якщо $f \geq 0$ або $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda) \cap \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu)$.

Вправа 4.3. Нехай функція $f : \mathsf{X} \to [0, +\infty)$ $\mathcal{F}$-вимірна, міра λ — σ-скінченна на $\mathcal{F}$. Довести, що міра

$$\mu(A) = \int_A f \, d\lambda, \quad A \in \mathcal{F},$$

σ-скінченна на $\mathcal{F}$.

Вправа 4.4. Нехай функція $f : \mathsf{X} \to [0, +\infty)$ $\mathcal{F}$-вимірна, міра λ — скінченна. Довести, що такі твердження еквівалентні:

1) $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda\big(\{x : \ n < f(x) \leq n+1\}\big) < +\infty$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(\{x : \ f(x) > n\}\big) < +\infty$.

Вправа 4.5. Нехай $f, \ f_n : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ — невід'ємні вимірні функції,

$$f_n \to f \pmod{\lambda}, \quad f_n \leq f \pmod{\lambda}.$$

Довести, що

$$\int_{\mathsf{X}} f_n \, d\lambda \to \int_{\mathsf{X}} f \, d\lambda \, .$$

Вправа 4.6 (теорема Юнга). Дано функції $f_n, g_n, h_n \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$ такі, що

$$f_n(x) \leq g_n(x) \leq h_n(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x), \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} f \, d\lambda, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} h_n \, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} h \, d\lambda, \quad f, \ h \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda).$$

Довести, що тоді $g \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$ і

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} g_n \, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} g \, d\lambda \, .$$

Розділ 5

Заряди. Абсолютна неперервність

5.1. Означення заряду. Розклади Гана та Жордана

Нехай $\mathcal{F}$ — довільна σ-алгебра підмножин універсальної множини X.

Означення 5.1. *Зарядом* називається σ-адитивна функція множин

$$\nu : \mathcal{F} \to (-\infty, +\infty]\,.$$

На відміну від функцій множин, розглянутих вище, ν може набувати від'ємних значень. Оскільки $-\infty$ не є можливим значенням ν, то при знаходженні суми ряду зарядів неперетинних множин ми не отримаємо невизначеності вигляду $\infty - \infty$.

Далі в цьому підрозділі ν позначатиме заряд, заданий на $\mathcal{F}$.

Приклад 5.1. Довільна міра, задана на σ-алгебрі, є зарядом.

Приклад 5.2. Для будь-яких $x_k \in \mathsf{X},\ a_k \in (-\infty,\ +\infty]$:

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_A(x_k)$$

є зарядом на 2^{X}.

Приклад 5.3. Якщо μ_1 — міра на $\mathcal{F}$, μ_2 — скінченна міра на $\mathcal{F}$, то $\nu = \mu_1 - \mu_2$ є зарядом на $\mathcal{F}$. У наслідку 5.1 нижче ми покажемо, що всі заряди мають таке зображення.

Властивості зарядів. 1. $\nu(\varnothing) = 0$. *Доведення.* За нашим узгодженням щодо функцій множин, для деякої множини $A \in \mathcal{F}$ виконується $\nu(A) < +\infty$. Тоді за σ-адитивністю ν отримуємо $\nu(A) = \nu(A) + \nu(\varnothing) + \nu(\varnothing) + \ldots$ Останній ряд має збігатися, а це можливе лише при $\nu(\varnothing) = 0$. $\square$

2. ν скінченно адитивний. *Доведення.* Використовуючи зліченну адитивність ν і рівність $\nu(\varnothing) = 0$, для неперетинних $A_k \in \mathcal{F},\ 1 \le k \le n$, маємо

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots\Big) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) + \nu(\varnothing) + \nu(\varnothing) + \cdots = \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k)\,. \qquad \square$$

3. Якщо $\nu(A) < +\infty$, то для будь-якої множини $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}$, виконується $\nu(B) < +\infty$. *Доведення.* Зі скінченної адитивності заряду маємо $\nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B)$. Якби б $\nu(B) = +\infty$, то, ураховуючи що $\nu(A \setminus B) > -\infty$, ми б отримали $\nu(A) = +\infty$. □

Означення 5.2. Множина $A \in \mathcal{F}$ називається *додатною* (відносно заряду ν), якщо для будь-якої множини $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}$, виконується $\nu(B) \geq 0$.

Множина $A \in \mathcal{F}$ називається *від'ємною* (відносно заряду ν), якщо для будь-якої множини $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}$, виконується $\nu(B) \leq 0$.

Порожня множина є додатною і від'ємною одночасно. Тому набори додатних і від'ємних множин є непорожніми.

Якщо в прикладі 5.2 покласти $\mathsf{X}_+ = \{x_k : \ a_k > 0\}$, $\mathsf{X}_- = \mathsf{X} \setminus \mathsf{X}_+$, то X_+ буде додатною множиною, а X_- — від'ємною. Виявляється, що таке розбиття X на додатну і від'ємну множини виконується і для довільного заряду.

Теорема 5.1 (розклад Гана). *Для будь-якого заряду ν існують множини X_+, X_- такі, що:*
1) X_+ — *додатна множина,* X_- — *від'ємна,*
2) $\mathsf{X}_+ \cup \mathsf{X}_- = \mathsf{X}$,
3) $\mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}_- = \varnothing$.

Доведення. **Крок 1. Визначення X_-.** Нехай

$$\alpha = \inf\bigl\{\nu(A) \bigm| A - \text{від'ємна}\bigr\} \tag{5.1}$$

(ми не виключаємо зараз можливості $\alpha = -\infty$). Візьмемо від'ємні множини A_n, $n \geq 1$, такі, що

$$\nu(A_n) \to \alpha, \quad n \to \infty,$$

і покладемо $\mathsf{X}_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Покажемо, що множина X_- від'ємна. Для цього розглянемо множини

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\,,\ n \geq 2,$$

тоді B_n неперетинні,

$$\mathsf{X}_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k\,.$$

Для довільної $B \subset \mathsf{X}_-$, $B \in \mathcal{F}$ маємо

$$\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B \cap B_n), \quad (B \cap B_n) \subset A_n,$$
$$A_n - \text{від'ємна} \Rightarrow \nu(B \cap B_n) \leq 0 \Rightarrow \nu(B) \leq 0,$$

тому X_- від'ємна (так ми фактично довели, що зліченне об'єднання від'ємних множин є від'ємною множиною. Беручи в цих об'єднаннях деякі множини порожніми, отримаємо: скінченне об'єднання від'ємних множин є від'ємною множиною).

Крім того,

$$\nu(\mathsf{X}_-) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \alpha$$

(звідси, зокрема, випливає, що $\alpha > -\infty$).

Крок 2. Визначення X_+. Візьмемо $\mathsf{X}_+ = \mathsf{X} \setminus \mathsf{X}_-$. Щоб завершити доведення, достатньо показати, що X_+ — додатна множина. Припустимо, що це не так, і знайдеться множина $C \subset \mathsf{X}_+$, $\nu(C) < 0$.

Якщо множина C від'ємна, ми можемо розглянути $\mathsf{X}'_- = \mathsf{X}_- \cup C$. Тоді X'_- є від'ємною множиною як об'єднання двох від'ємних множин, і

$$\nu(\mathsf{X}'_-) = \nu(\mathsf{X}_-) + \nu(C) < \nu(\mathsf{X}_-) = \alpha, \tag{5.2}$$

що суперечить визначенню α в (5.1).

Отже, множина C не є від'ємною, і в C знайдеться підмножина з додатним значенням заряду. Візьмемо найменше можливе $k_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\exists\, C_1 \subset C : \ \nu(C_1) > \frac{1}{k_1}.$$

Маємо

$$\nu(C \setminus C_1) = \nu(C) - \nu(C_1) < 0, \quad C \setminus C_1 \subset \mathsf{X}_+ .$$

Так само, як і C, множина $C \setminus C_1$ не може бути від'ємною, і тому має підмножину з додатним зарядом. Візьмемо найменше можливе $k_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\exists\, C_2 \subset (C \setminus C_1) : \ \nu(C_2) > \frac{1}{k_2}.$$

Далі також маємо $\nu\big(C \setminus (C_1 \cup C_2)\big) < 0$, множина $C \setminus (C_1 \cup C_2)$ не може бути від'ємною, у ній аналогічно вибираємо підмножину C_3 і т. д. На кожному n-му кроці вибираємо найменше можливе $k_n \in \mathbb{N}$, для якого

$$\exists\, C_n \subset \Big(C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k\Big) : \ \nu(C_n) > \frac{1}{k_n},$$

і це буде можливо, оскільки всі отримувані так C_k будуть неперетинними,

$$\nu\Big(C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k\Big) = \nu(C) - \sum_{k=1}^{n-1} \nu(C_k) < 0,$$

а множина $C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k$ не може бути від'ємною.

Також $\nu(C) < 0$, $\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\big) \subset C$, тому, за властивістю 3 заряду, скінченним має бути значення

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n).$$

Отже, при $n \to \infty$ буде $\nu(C_n) \to 0$, тому і $k_n \to \infty$.

Розглянемо множину $D = C \setminus \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\big)$. Маємо

$$D \subset \mathsf{X}_+, \quad \nu(D) = \nu(C) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < 0.$$

Припустимо, що множина D не є від'ємною. Тоді існує $D_1 \subset D$, $\nu(D_1) > 0$. Знайдеться $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\nu(D_1) > (1/l)$, а також існує $k_n > l$. Так ми отримали суперечність із вибором k_n, адже на n-му кроці існувала

$$D_1 \subset \Big(C \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\Big) \subset \Big(C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k\Big), \quad \nu(D_1) > \frac{1}{l} > \frac{1}{k_n}\,,$$

і k_n не було б найменшим можливим на цьому кроці.

Значить, D — від'ємна множина, $D \subset \mathsf{X}_+$, $\nu(D) < 0$. Тоді $\mathsf{X}_- \cup D$ є від'ємною множиною, і, як і в (5.2), ми маємо

$$\nu(\mathsf{X}_- \cup D) = \nu(\mathsf{X}_-) + \nu(D) < \nu(\mathsf{X}_-) = \alpha,$$

що суперечить вибору α. Отже, припущення, що множина X_+ не є додатною, є хибним. □

Наслідок 5.1 (розклад Жордана). *Для заряду ν на $\mathcal{F}$ покладемо*

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+), \quad \nu_-(A) = -\nu(A \cap \mathsf{X}_-), \quad A \in \mathcal{F}\,. \tag{5.3}$$

Тоді ν_+ — міра, ν_- — скінченна міра, і

$$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A), \quad A \in \mathcal{F}\,.$$

При цьому, якщо ν — скінченний, то ν_+ — скінченна, а якщо ν — σ-скінченний, то ν_+ — σ-скінченна.

Доведення. Оскільки X_+ — додатна множина, а X_+ — від'ємна, виконується $\nu_+(A) \geq 0$, $\nu_-(A) \geq 0$. Також

$$\nu(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+) + \nu(A \cap \mathsf{X}_-) = \nu_+(A) - \nu_-(A).$$

Із σ-адитивності ν легко отримується σ-адитивність ν_+ і ν_-.

Усі значення ν_- скінченні, оскільки $\nu(A \cap \mathsf{X}_-) > -\infty$.

Якщо всі $\nu(A) < +\infty$, то $\nu_+(A) = \nu(A) + \nu_-(A) < +\infty$, і міра ν_+ скінченна.

Якщо $\mathsf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$, $\nu(\mathsf{X}_n) < +\infty$, то, як ми тільки що показали, $\nu_+(\mathsf{X}_n) < +\infty$, і міра ν_+ σ-скінченна. □

Зауваження 5.1. Розклад Гана, взагалі кажучи, не єдиний. Зокрема, у прикладі 5.2 можна взяти $\mathsf{X}_+ = \{x_k : a_k > 0\}$ або $\mathsf{X}_+ = \mathsf{X} \setminus \{x_k : a_k < 0\}$, і потім покласти $\mathsf{X}_- = \mathsf{X} \setminus \mathsf{X}_+$.

Зауваження 5.2. Розклад Жордана єдиний. Покажемо це. Припустимо, що $\mathsf{X} = \mathsf{X}_+ \cup \mathsf{X}_- = \mathsf{X}'_+ \cup \mathsf{X}'_-$ — два різних розклади Гана, і разом із мірами ν_+, ν_- із (5.3) розглянемо другий розклад Жордана

$$\nu'_+(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}'_+), \quad \nu'_-(A) = -\nu(A \cap \mathsf{X}'_-)\,.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\nu_+(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}'_+) + \nu(A \cap \mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}'_-) = \\
= \nu(A \cap \mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}'_+), \\
\nu'_+(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}'_+) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}'_+) + \nu(A \cap \mathsf{X}_- \cap \mathsf{X}'_+) = \\
= \nu(A \cap \mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}'_+), \\
\nu_+(A) = \nu'_+(A), \quad \nu_-(A) = \nu_+(A) - \nu(A) = \nu'_+(A) - \nu(A) = \nu'_-(A).
\end{aligned}$$

(тут ураховано, що множини $A \cap \mathsf{X}_+ \cap \mathsf{X}'_-$ і $A \cap \mathsf{X}_- \cap \mathsf{X}'_+$ є додатними і від'ємними одночасно, тому мають заряд рівний нулю).

Означення 5.3. *Повною варіацією* заряду ν називається міра

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-\,.$$

Зауваження 5.2 показує, що це означення є коректним.

Приклад 5.4. Нехай функція $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ є такою, що визначено інтеграл $\int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda$, причому $\int_{\mathsf{X}} f_-\,d\lambda < +\infty$. Тоді функція множин

$$\nu(A) = \int_A f\,d\lambda, \quad A \in \mathcal{F},$$

є σ-адитивною на $\mathcal{F}$ (див. властивість 7 із підрозділу 4.4). Також

$$\nu(A) \geq \int_A (-f_-)\, d\lambda \geq \int_{\mathsf{X}} (-f_-)\, d\lambda > -\infty,$$

тому ν — заряд. Зображення

$$\mathsf{X} = \{x :\ f(x) \geq 0\} \bigcup \{x :\ f(x) < 0\}$$

є розбиттям X на додатну і від'ємну множину й тому є розкладом Гана для цього заряду. Відповідний розклад Жордана:

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+) = \int_{A\cap\{f\geq 0\}} f\, d\lambda = \int_A f \mathbf{1}_{\{f\geq 0\}}\, d\lambda = \int_A f_+\, d\lambda,$$
$$\nu_-(A) = -\nu(A \cap \mathsf{X}_-) = -\int_{A\cap\{f<0\}} f\, d\lambda = \int_A (-f)\mathbf{1}_{\{f<0\}}\, d\lambda = \int_A f_-\, d\lambda\,.$$

Повна варіація

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = \int_A (f_+ + f_-)\, d\lambda = \int_A |f|\, d\lambda\,.$$

5.2. Теорема Радона — Никодима

У цьому підрозділі всі міри і заряди вважаємо заданими на вимірному просторі $(\mathsf{X}, \mathcal{F})$.

Означення 5.4. Заряд ν називається *абсолютно неперервним* відносно міри λ, якщо

$$\forall\, A \in \mathcal{F} :\ \lambda(A) = 0 \ \Rightarrow\ \nu(A) = 0\,.$$

У цьому випадку вживається позначення $\nu \ll \lambda$.

Зокрема, у прикладі 5.4 для $\nu(A) = \int_A f\, d\lambda$ виконується $\nu \ll \lambda$. Нижче ми доведемо, що таке зображення мають усі σ-скінченні заряди, абсолютно неперервні відносно σ-скінченної міри λ.

Лема 5.1. *Нехай ν — заряд із розкладом Жордана $\nu = \nu_+ - \nu_-$, λ — міра. Наступні твердження еквівалентні:*
1) $\nu \ll \lambda$;
2) $\nu_+ \ll \lambda,\ \nu_- \ll \lambda$;
3) $|\nu| \ll \lambda$.

Доведення. $1) \Rightarrow 2)$. Доведемо, що, наприклад, $\nu_+ \ll \lambda$. Нехай $A \in \mathcal{F}$ така, що $\lambda(A) = 0$. Тоді

$$\lambda\big(A \cap \mathsf{X}_+\big) = 0 \overset{\nu \ll \lambda}{\Longrightarrow} \nu\big(A \cap \mathsf{X}_+\big) = 0,$$

а за означенням $\nu_+(A) = \nu\big(A \cap \mathsf{X}_+\big)$. Цілком аналогічно тут справджується $\nu_-(A) = -\nu\big(A \cap \mathsf{X}_-\big) = 0$.

$2) \;\Rightarrow\; 3)$. Використовуючи умову 2), маємо

$$\lambda(A) = 0 \overset{\nu_+,\nu_-\ll\lambda}{\Longrightarrow} \nu_+(A) = \nu_-(A) = 0 \;\Rightarrow\; |\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0.$$

$3) \;\Rightarrow\; 1)$. Тут виконується

$$\lambda(A) = 0 \overset{|\nu|\ll\lambda}{\Longrightarrow} |\nu|(A) = 0,\; |\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \nu_+(A) = \nu_-(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A) = 0. \quad \square$$

Наступне твердження є одним із найважливіших у теорії інтеграла Лебега і має численні застосування в різних галузях математики.

Теорема 5.2 (теорема Радона – Никодима). *Нехай ν — σ-скінченний заряд, λ — σ-скінченна міра, $\nu \ll \lambda$. Тоді існує функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ така, що*

$$\forall\, A \in \mathcal{F} :\; \nu(A) = \int_A f\, d\lambda. \tag{5.4}$$

При цьому f визначена однозначно з точністю до еквівалентності відносно λ.

Доведення. **Крок 1.** Спочатку розглянемо випадок, коли ν і λ — скінченні міри. Візьмемо клас функцій

$$Q = \Big\{ g : \mathsf{X} \to \mathbb{R} \;\Big|\; g \text{ невід'ємні вимірні},\; \forall\, A \in \mathcal{F} :\; \int_A g\, d\lambda \le \nu(A) \Big\}.$$

Клас Q непорожній, $0 \in Q$. Також зазначимо, що коли $g_1,\ g_2 \in Q$, то $g = \max\{g_1, g_2\} \in Q$. Дійсно, для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}$ маємо

$$\int_A g\, d\lambda = \int_{A\cap\{g_1 \ge g_2\}} g\, d\lambda + \int_{A\cap\{g_1 < g_2\}} g\, d\lambda =$$
$$= \int_{A\cap\{g_1 \ge g_2\}} g_1\, d\lambda + \int_{A\cap\{g_1 < g_2\}} g_2\, d\lambda \overset{g_1,g_2\in Q}{\le}$$
$$\overset{g_1,g_2\in Q}{\le} \nu\big(A \cap \{g_1 \ge g_2\}\big) + \nu\big(A \cap \{g_1 < g_2\}\big) = \nu(A) \Rightarrow g \in Q.$$

Застосовуючи взяття максимуму кілька разів, отримаємо, що для $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n \in Q$ виконується $\max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \in Q$.

Нехай

$$\alpha := \sup_{g\in Q} \int_{\mathsf{X}} g\, d\lambda. \tag{5.5}$$

Оскільки для $g \in Q$ справджується $\int_{\mathsf{X}} g\, d\lambda \le \nu(\mathsf{X}) < +\infty$, то $\alpha < +\infty$. Розглянемо послідовність функцій $g_n \in Q$ таку, що

$$\int_{\mathsf{X}} g_n\, d\lambda \to \alpha, \quad n \to \infty.$$

Покладемо $f_n = \max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, маємо $f_n \in Q$. Тоді

$$\int_{\mathsf{X}} g_n\, d\lambda \le \int_{\mathsf{X}} f_n\, d\lambda \le \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathsf{X}} f_n\, d\lambda \to \alpha, \quad n \to \infty.$$

При цьому справедливе $f_n \le f_{n+1}$, і тому існує

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Далі покажемо, що f задовольняє твердження теореми.

Використовуючи теорему про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності (теорема 4.4) отримуємо, що для будь-якої $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\lambda, \quad \int_A f_n\, d\lambda \le \nu(A) \Rightarrow \int_A f\, d\lambda \le \nu(A)\,. \tag{5.6}$$

Також

$$\int_{\mathsf{X}} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n\, d\lambda = \alpha. \tag{5.7}$$

Розглянемо функцію множин

$$\varphi(A) = \nu(A) - \int_A f\, d\lambda\,, \quad A \in \mathcal{F}. \tag{5.8}$$

Вона невід'ємна, σ-адитивна, і тому є мірою.

Припустимо, що (5.4) не справджується для визначеної нами f. Тоді знайдеться множина $A^* \in \mathcal{F}$ така, що $\varphi(A^*) > 0$. Міра λ скінченна, тому $\lambda(A^*) < +\infty$. Візьмемо $\beta > 0$ таке, що

$$\varphi(A^*) > \beta\lambda(A^*),$$

і розглянемо заряд $\varphi - \beta\lambda$ на $\mathcal{F} \cap A^*$. Нехай $B = A^*_+$ — додатна множина з розкладу Гана цього заряду. Оскільки $(\varphi - \beta\lambda)(A^*) > 0$, справедливе $(\varphi - \beta\lambda)(B) > 0$. Зазначимо, що $\lambda(B) > 0$ (якби було $\lambda(B) = 0$, то з рівності (5.8) й умови $\nu \ll \lambda$ випливало б, що $(\varphi - \beta\lambda)(B) = 0$). Також маємо

$$\begin{aligned} &\forall\, C \subset B,\ C \in \mathcal{F}:\ \varphi(C) - \beta\lambda(C) \ge 0 \overset{(5.8)}{\iff} \\ &\overset{(5.8)}{\iff} \nu(C) - \int_C f\, d\lambda - \beta\lambda(C) \ge 0 \iff \\ &\iff \nu(C) \ge \int_C f\, d\lambda + \beta\lambda(C)\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Розглянемо функцію
$$h = f + \beta \mathbf{1}_B.$$
Покажемо, що $h \in Q$. Для довільної $A \in \mathcal{F}$ маємо

$$\int_A h\,d\lambda = \int_{A\setminus B} h\,d\lambda + \int_{A\cap B} h\,d\lambda \overset{h=f \text{ на } A\setminus B}{=}$$
$$\overset{h=f \text{ на } A\setminus B}{=} \int_{A\setminus B} f\,d\lambda + \int_{A\cap B} (f + \beta \mathbf{1}_B)\,d\lambda \overset{(5.6)}{\leq}$$
$$\overset{(5.6)}{\leq} \nu(A\setminus B) + \int_{A\cap B} f\,d\lambda + \beta\lambda(A\cap B) \overset{(5.9)}{\leq} \nu(A\setminus B) + \nu(A\cap B) = \nu(A).$$

З іншого боку,
$$\int_{\mathsf{X}} h\,d\lambda = \int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda + \beta\lambda(B) \overset{(5.7)}{=} \alpha + \beta\lambda(B) \overset{\lambda(B)>0}{>} \alpha,$$
що суперечить визначенню α в (5.5). Отже, (5.4) справджується.

Оскільки $\int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda = \nu(\mathsf{X}) < +\infty$, за властивістю 10 інтеграла, маємо $f < +\infty \pmod \lambda$. Замінимо всі нескінченні значення f, наприклад, на нульові, і матимемо, що всі $f(x) \in \mathbb{R}$, і (5.4) залишиться справедливим.

Покажемо, що f визначена однозначно з точністю до еквівалентності. Нехай $\tilde{f}$ — ще одна функція, для якої справджується (5.4). Тоді $f,\ \tilde{f} \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$ і

$$\forall A \in \mathcal{F}:\ \nu(A) = \int_A f\,d\lambda = \int_A \tilde{f}\,d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.3\,2)}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{\text{Теорема } 4.3\,2)}{\Longrightarrow} \int_A (f - \tilde{f})\,d\lambda = 0 \quad \overset{\text{Власт. } 12 \text{ інтеграла}}{\Longrightarrow} f - \tilde{f} = 0 \pmod \lambda.$$

Також відмітимо, що побудована нами f невід'ємна.

Крок 2. Розглянемо випадок, коли ν і λ — σ-скінченні міри. З означення σ-скінченості маємо
$$\mathsf{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathsf{X}_i, \quad \nu(\mathsf{X}_i) < +\infty, \quad \mathsf{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{Y}_j, \quad \lambda(\mathsf{Y}_j) < +\infty.$$

На кожній множині $\mathsf{X}_i \cap \mathsf{Y}_j$ і ν, і λ є скінченними мірами. Набір усіх цих множин є зліченним, запишемо його як упорядковану послідовність:
$$\{\mathsf{X}_i \cap \mathsf{Y}_j, \quad i \geq 1, \quad j \geq 1\} = \{\mathsf{Z}_n, \quad n \geq 1\},$$
і візьмемо неперетинні множини
$$\mathsf{V}_n = \mathsf{Z}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathsf{Z}_k, \quad n \geq 2, \quad \mathsf{V}_1 = \mathsf{Z}_1. \tag{5.10}$$

Маємо, що $\mathsf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{V}_n$, на кожній V_n $\nu \ll \lambda$, і ми можемо застосувати результат із кроку 1. Для кожного n знайдеться функція $f_n : \mathsf{V}_n \to \mathbb{R}$ така, що

$$\forall B \subset \mathsf{V}_n,\ B \in \mathcal{F}:\ \nu(B) = \int_B f_n \, d\lambda. \tag{5.11}$$

Візьмемо функцію f, яка на кожній V_n дорівнює відповідній f_n. Тоді для кожної множини $A \in \mathcal{F}$ маємо

$$\nu(A) = \sum_{n \geq 1} \nu\big(A \cap \mathsf{V}_n\big) \overset{(5.11)}{=} \sum_{n \geq 1} \int_{A \cap \mathsf{V}_n} f_n \, d\lambda \overset{f_n = f \text{ на } \mathsf{V}_n}{=}$$
$$\overset{f_n = f \text{ на } \mathsf{V}_n}{=} \sum_{n \geq 1} \int_{A \cap \mathsf{V}_n} f \, d\lambda \overset{\text{Теорема } 4.2}{=} \int_A f \, d\lambda.$$

Тому для цієї f справджується (5.4).

Зазначимо, що і тут $f \geq 0$.

Із кроку 1 випливає, що на кожній V_n функція, для якої справджується (5.4), збігається з f м. с. Тоді й на всій X така функція збігається з f м. с.

Крок 3. Тепер розглянемо загальний випадок, коли ν — σ-скінченний заряд, а λ — σ-скінченна міра. Нехай $\mathsf{X} = \mathsf{X}_+ \cup \mathsf{X}_-$ — розклад Гана заряду ν, ми візьмемо розклад Жордана для ν:

$$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A), \quad \nu_+(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+), \quad \nu_-(A) = -\nu(A \cap \mathsf{X}_-).$$

За лемою 5.1, $\nu_+ \ll \lambda$ і $\nu_- \ll \lambda$. Розглянемо ν_+ як міру на підмножинах X_+ (там $\nu_+ = \nu$), ν_- — як міру на підмножинах X_- (там $\nu_- = -\nu$). Використовуючи крок 2, візьмемо функції $f_+ : \mathsf{X}_+ \to \mathbb{R}$ і $f_- : \mathsf{X}_- \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\forall B \subset \mathsf{X}_+,\ B \in \mathcal{F}:\ \nu_+(B) = \int_B f_+ \, d\lambda,$$
$$\forall C \subset \mathsf{X}_-,\ C \in \mathcal{F}:\ \nu_-(C) = \int_C f_- \, d\lambda.$$

Покладемо $f = f_+$ на X_+ і $f = -f_-$ на X_-. Тоді для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}$ маємо

$$\nu(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_+) + \nu(A \cap \mathsf{X}_-) = \int_{A \cap \mathsf{X}_+} f_+ \, d\lambda - \int_{A \cap \mathsf{X}_-} f_- \, d\lambda =$$
$$= \int_{A \cap \mathsf{X}_+} f \, d\lambda + \int_{A \cap \mathsf{X}_-} f \, d\lambda \overset{\text{Власт. 7 інтеграла}}{=} \int_A f \, d\lambda\,.$$

Оскільки f визначається однозначно з точністю до еквівалентності на X_+ і на X_-, вона є єдиною на X із точністю до рівності м. с. $\square$

Зауваження 5.3. Функція f із (5.4) називається *щільністю* або *похідною Радона–Никодима* заряду ν за мірою λ. При цьому вживається позначення

$$f = \frac{d\nu}{d\lambda}\,.$$

5.3. Розклад Лебега

Означення 5.5. Заряд ν називається *сингулярним* відносно міри λ, якщо

$$\exists \mathsf{B} \in \mathcal{F},\ \lambda(\mathsf{B}) = 0,\ \forall A \in \mathcal{F},\ A \subset (\mathsf{X} \setminus \mathsf{B}):\ \nu(A) = 0\,.$$

У цій ситуації використовується позначення $\nu \perp \lambda$. Тут фактично заряд ν "зосереджено" на множині B, а міру λ — на $\mathsf{X} \setminus \mathsf{B}$.

Приклад 5.5. На вимірному просторі $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ розглянемо міру Лебега λ_1 і заряд

$$\nu(A) = \mathbf{1}_A(1) - \mathbf{1}_A(-1).$$

Тоді $\nu \perp \lambda_1$, тут можна взяти $\mathsf{B} = \{-1, 1\}$.

Теорема 5.3 (розклад Лебега). *Нехай ν — σ-скінченний заряд, λ — σ-скінченна міра. Тоді існує єдиний розклад*

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_1,\ \nu_2\ -\ \sigma\text{-скінченні заряди}, \quad \nu_1 \ll \lambda, \quad \nu_2 \perp \lambda.$$

Доведення. **Крок 1.** Нехай ν — скінченний заряд, а λ — скінченна міра. Розглянемо міру $\mu = |\nu| + \lambda$. Тоді $|\nu| \ll \mu$, і, за теоремою Радона–Никодима, для деякої функції f

$$|\nu|(A) = \int_A f\,d\mu, \quad A \in \mathcal{F}. \tag{5.12}$$

Отримуємо $f \geq 0 \pmod{\lambda}$. Інакше для деякого $n \geq 1$ ми б мали

$$A = \{x \in \mathsf{X}:\ f(x) \leq -1/n\}, \quad \lambda(A) > 0.$$

Узявши A в (5.12), ми б дістали

$$|\nu|(A) \leq (-1/n)\lambda(A) < 0,$$

що неможливо для міри $|\nu|$.

Так само розглянемо $f \leq 1 \pmod{\lambda}$. Аналогічно, якби це було не вірно, для деякого $n \geq 1$ дістали б

$$A = \{x \in \mathsf{X}:\ f(x) \geq 1 + 1/n\}, \quad \lambda(A) > 0.$$

Для A в (5.12), ми б отримали

$$|\nu|(A) \geq (1+1/n)\lambda(A) = (1+1/n)(|\nu|(A)+\lambda(A)),$$

що неможливо.

Покладемо

$$\mathsf{X}_1 = \{x \in \mathsf{X}:\ 0 \leq f(x) < 1\}, \quad \mathsf{X}_2 = \{x \in \mathsf{X}:\ f(x) = 1\},$$
$$\nu_1(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_1), \quad \nu_2(A) = \nu(A \cap \mathsf{X}_2), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (5.13)$$

Тоді

$$\mathsf{X} = \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2, \quad \nu = \nu_1 + \nu_2.$$

Маємо

$$|\nu|(A \cap \mathsf{X}_1) = \int_{A\cap \mathsf{X}_1} f\,d\mu \overset{(*)}{=} \int_{A\cap \mathsf{X}_1} f\,d|\nu| + \int_{A\cap \mathsf{X}_1} f\,d\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_{A\cap \mathsf{X}_1} (1-f)\,d|\nu| = \int_{A\cap \mathsf{X}_1} f\,d\lambda. \quad (5.14)$$

Рівність (*) для $\mu = |\nu| + \lambda$ і невід'ємної f легко обґрунтовується стандартними методами через використання простих функцій. Оскільки $|\nu|$, λ, μ скінченні, то записані в інтегралах функції є інтегровними, лінійність інтегралів справджується.

Якщо $\lambda(A) = 0$, то з (5.14) ми маємо, що

$$\int_{A\cap \mathsf{X}_1} (1-f)\,d|\nu| = 0, \quad 1 - f > 0 \text{ на } A \cap \mathsf{X}_1 \overset{\text{Власт. 11 інтеграла}}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{\text{Власт. 11 інтеграла}}{\Longrightarrow} 1 - f = 0 \pmod{|\nu|} \text{ на } A \cap \mathsf{X}_1.$$

Тут з одного боку $1 - f > 0$ в усіх точках $A \cap \mathsf{X}_1$, а з іншого $1 - f \neq 0$ можливо лише на множині нульової міри $|\nu|$. Тому

$$|\nu|(A \cap \mathsf{X}_1) = 0 \ \Rightarrow\ \nu(A \cap \mathsf{X}_1) = 0 \ \Leftrightarrow\ \nu_1(A) = 0.$$

Значить, $\nu_1 \ll \lambda$.

Доведемо, що $\nu_2 \perp \lambda$. Перевіримо означення 5.5 для $\mathsf{B} = \mathsf{X}_2$. Очевидно, що

$$\forall\, A \in \mathcal{F},\ A \subset (\mathsf{X} \setminus \mathsf{X}_2):\ \nu_2(A) = 0. \quad (5.15)$$

Підставимо в (5.12) $A = \mathsf{X}_2$. Оскільки $f = 1$ на X_2, то отримаємо

$$|\nu|(\mathsf{X}_2) = \mu(\mathsf{X}_2) = |\nu|(\mathsf{X}_2) + \lambda(\mathsf{X}_2) \ \Rightarrow\ \lambda(\mathsf{X}_2) = 0$$

(тут важливо, що $|\nu|(\mathsf{X}_2) < +\infty$).

Крок 2. Обґрунтуємо єдиність розкладу. Нехай ми маємо ще один розклад:

$$\nu = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 \ll \lambda, \quad \eta_2 \perp \lambda.$$

Користуючись означенням 5.5, візьмемо множину $\mathsf{B} \in \mathcal{F}$ таку, що

$$\lambda(\mathsf{B}) = 0,\ \forall C \in \mathcal{F},\ C \subset (\mathsf{X} \setminus \mathsf{B}):\ \eta_2(C) = 0\,. \tag{5.16}$$

Також для довільної $C \in \mathcal{F}$ ми одержимо

$$\begin{aligned} \nu(C) = \eta_1(C) + \eta_2(C) = \nu_1(C) + \nu_2(C) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \eta_1(C) - \nu_1(C) = \nu_2(C) - \eta_2(C) \end{aligned} \tag{5.17}$$

(оскільки значення ν_1 і ν_2 скінченні, таке перетворення рівності є можливим).

Розглянемо довільну $A \in \mathcal{F}$. Із (5.15) і (5.16) випливає, що

$$\begin{aligned} \nu_2\big(A \setminus (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big) = \eta_2\big(A \setminus (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big) = 0 \quad \overset{(5.17)}{\Longrightarrow} \\ \overset{(5.17)}{\Longrightarrow} \quad \nu_1\big(A \setminus (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big) = \eta_1\big(A \setminus (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Також

$$\begin{aligned} \lambda\big(A \cap (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big) \le \lambda(\mathsf{X}_2) + \lambda(\mathsf{B}) = 0 \quad \overset{\nu_1,\eta_1 \ll \lambda}{\Longrightarrow} \\ \overset{\nu_1,\eta_1 \ll \lambda}{\Longrightarrow} \quad \nu_1\big(A \cap (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big) = \eta_1\big(A \cap (\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{B})\big) = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Додавши (5.18) і (5.19), ми отримаємо, що $\eta_1(A) = \nu_1(A)$. Із (5.17) маємо $\eta_2(A) = \nu_2(A)$, і тому два ці розклади збігаються.

Крок 3. Нехай ν і λ — σ-скінченні. Як і в (5.10), побудуємо набір неперетинних множин $\mathsf{V}_n \in \mathcal{F}$, $n \ge 1$, на кожній із яких ν і λ — скінченні, $\mathsf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{V}_n$.

Аналогічно (5.13), для кожної V_n візьмемо розклад $\mathsf{V}_n = \mathsf{V}_n^{(1)} \cup \mathsf{V}_n^{(2)}$ і для $A \in \mathcal{F}$ покладемо

$$\nu_n^{(1)}(A) = \nu\big(A \cap \mathsf{V}_n^{(1)}\big), \quad \nu_n^{(2)}(A) = \nu\big(A \cap \mathsf{V}_n^{(2)}\big),$$

де $\nu_n^{(1)} \ll \lambda$, $\nu_n^{(2)} \perp \lambda$ на підмножинах V_n. Визначимо

$$\begin{aligned} \nu_1(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu\big(A \cap \mathsf{V}_n^{(1)}\big) = \nu\Big(A \bigcap \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{V}_n^{(1)}\Big), \\ \nu_2(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu\big(A \cap \mathsf{V}_n^{(2)}\big) = \nu\Big(A \bigcap \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{V}_n^{(2)}\Big). \end{aligned}$$

Маємо $\nu_1 \ll \lambda$, адже для будь-якої множини A з $\lambda(A) = 0$ виконується

$$\lambda\bigl(A \cap \mathsf{V}_n^{(1)}\bigr) = 0 \overset{\nu_n^{(1)} \ll \lambda}{\Longrightarrow} \nu_n^{(1)}(A) = \nu\bigl(A \cap \mathsf{V}_n^{(1)}\bigr) = 0 \ \Rightarrow\ \nu_1(A) = 0.$$

Також $\nu_2 \perp \lambda$, оскільки, за визначенням множин $\mathsf{V}_n^{(2)}$, усі $\lambda\bigl(\mathsf{V}_n^{(2)}\bigr) = 0$, тому для ν_2 і λ справджується означення 5.5 із $\mathsf{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{V}_n^{(2)}$.

Покажемо, що розклад єдиний. Нехай

$$\nu = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 \ll \lambda, \quad \eta_2 \perp \lambda.$$

Тоді для звужень записаних тут функцій множин на V_n також буде $\eta_1 \ll \lambda$, $\eta_2 \perp \lambda$. Із відміченної у кроці 2 єдиності розкладу ми отримуємо, що для будь-якої $A \in \mathcal{F}$

$$\eta_1\bigl(A \cap \mathsf{V}_n\bigr) = \nu_1\bigl(A \cap \mathsf{V}_n\bigr), \quad \eta_2\bigl(A \cap \mathsf{V}_n\bigr) = \nu_2\bigl(A \cap \mathsf{V}_n\bigr).$$

Узявши суму по $n \geq 1$, матимемо $\eta_1(A) = \nu_1(A)$, $\eta_2(A) = \nu_2(A)$. □

5.4. Абсолютно неперервні функції на $[a, b]$

Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має *обмежену варіацію* на $[a, b]$ (множину всіх таких функцій ми позначатимемо через $\mathbb{BV}([a, b])$, відповідні означення та властивості варіації див., наприклад, у [7, § 9.2]). Через $\mathbb{V}(f, [c, d])$ ми позначатимемо величину варіації f на $[c, d]$.

Розглянемо дві функції

$$F(x) = \mathbb{V}(f, [a, x]), \quad F_1(x) = F(x) - f(x), \quad x \in [a, b].$$

Відомо, що функції F та F_1 неспадні, отже, $f = F - F_1$. Якщо F та F_1 неперервні справа, вони визначають міри Лебега–Стілтьєса λ_F і λ_{F_1} на підмножинах $[a, b]$ (див. підрозділ 2.6), ці міри будуть скінченними. Для формально необхідного визначення функцій F та F_1 на всьому $\mathbb{R}$ можемо покласти

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a), \quad F_1(x) = F_1(a), \quad x < a, \\ F(x) &= F(b), \quad F_1(x) = F_1(b), \quad x > b, \end{aligned}$$

при цьому монотонність і неперервність справа зберігаються.

Визначимо скінченний заряд $\nu_f = \lambda_F - \lambda_{F_1}$ на борельовій σ-алгебрі $\mathcal{B}\bigl((a, b]\bigr)$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \nu_f\bigl((c, d]\bigr) &= \lambda_F\bigl((c, d]\bigr) - \lambda_{F_1}\bigl((c, d]\bigr) = \\ &= \bigl(F(d) - F(c)\bigr) - \bigl(F_1(d) - F_1(c)\bigr) = f(d) - f(c). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Наша подальша мета — з'ясувати, при яких умовах ν_f абсолютно неперервний відносно міри Лебега λ_1. Для цього введемо таке поняття.

Означення 5.6. Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ називається *абсолютно неперервною на відрізку* $[a,b]$, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, (a_k, b_k) \subset [a,b],\ 1 \le k \le n \text{ (неперетинних)},\ n \ge 1 :$$
$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \bigl| f(b_k) - f(a_k) \bigr| < \varepsilon\,. \qquad (5.21)$$

У цьому випадку вживатимемо позначення $f \in \mathbb{AC}([a,b])$.

Приклад 5.6. Нехай f задовольняє умову Ліпшіця на $[a,b]$,

$$\bigl| f(x) - f(y) \bigr| \le L|x-y|, \quad x,\ y \in [a,b].$$

Тоді $f \in \mathbb{AC}([a,b])$. Достатньо в (5.21) покласти $\delta = \varepsilon / L$, і матимемо

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl| f(b_k) - f(a_k) \bigr| \le \sum_{k=1}^{n} L|b_k - a_k| < L\delta = \varepsilon.$$

Властивості функцій, абсолютно неперервних на $[a,b]$.

1. $f \in \mathbb{AC}([a,b]) \Rightarrow cf \in \mathbb{AC}([a,b])$.

Доведення. Випадок $c = 0$ є очевидним, нехай $c \ne 0$. Візьмемо в означенні 5.6 $\delta > 0$ таке, що

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \bigl| f(b_k) - f(a_k) \bigr| < \frac{\varepsilon}{|c|}\,.$$

Тоді для функції cf буде справджуватись (5.21) із даними δ, ε. □

2. $f,\ g \in \mathbb{AC}([a,b]) \Rightarrow f + g \in \mathbb{AC}([a,b])$.

Доведення. В означенні 5.6 виберемо δ_1, $\delta_2 > 0$ такі, що

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta_1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \bigl| f(b_k) - f(a_k) \bigr| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta_2 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \bigl| g(b_k) - g(a_k) \bigr| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Покладемо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тоді, якщо $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, то справджуються всі записані тут нерівності, і ми отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl| (f(b_k) + g(b_k)) - (f(a_k) + g(a_k)) \bigr| < \varepsilon\,. \qquad \square$$

3. $f \in \mathbb{AC}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathbb{C}([a,b])$.

Доведення. При $n = 1$ (5.21) перетворюється на означення рівномірної неперервності f на $[a,b]$. $\square$

У наступних допоміжних твердженнях ми отримаємо зв'язок між властивостями функції та властивостями її варіації.

Лема 5.2. *Нехай $f \in \mathbb{BV}([a,b])$ і f неперервна справа в точці $x_0 \in [a,b)$. Тоді функція $F(x) = \mathbb{V}(f,[a,x])$ неперервна справа в x_0.*

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ такі, що

$$\mathbb{V}(f,[x_0,b]) - \sum_{k=1}^{n} \big| f(x_k) - f(x_{k-1}) \big| < \varepsilon\,. \tag{5.22}$$

Оскільки f неперервна справа в x_0, маємо

$$\exists\,\delta > 0\ \forall\, x \in (x_0, x_0+\delta):\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Можемо вважати, що $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$, якщо це не так, ми можемо додати відповідну точку до розбиття між x_0 і x_1, при цьому сума в (5.22) може лише збільшитись, нерівність буде справджуватись. Тоді

$$\big|f(x_1) - f(x_0)\big| < \varepsilon \overset{(5.22)}{\Longrightarrow} \mathbb{V}(f,[x_0,b]) - \sum_{k=2}^{n} \big| f(x_k) - f(x_{k-1}) \big| < 2\varepsilon, \tag{5.23}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \big| f(x_k) - f(x_{k-1}) \big| \le \mathbb{V}(f,[x_1,b]) \ \overset{(5.23)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(5.23)}{\Longrightarrow}\ \mathbb{V}(f,[x_0,b]) - \mathbb{V}(f,[x_1,b]) < 2\varepsilon \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \mathbb{V}(f,[x_0,x_1]) = F(x_1) - F(x_0) < 2\varepsilon \overset{F\uparrow}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{F\uparrow}{\Longrightarrow} F(x) - F(x_0) < 2\varepsilon,\ x \in (x_0,x_1). \quad \square$$

Лема 5.3. *Нехай $f \in \mathbb{AC}([a,b])$. Тоді $f \in \mathbb{BV}([a,b])$.*

Доведення. Припустимо, що варіація f необмежена. Тоді

$$\forall\, j \ge 1\ \exists\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b:\ \sum_{k=1}^{n} \big| f(x_k) - f(x_{k-1}) \big| \ge j. \tag{5.24}$$

До вказаного розбиття додамо точки

$$a + (b-a)i/j, \quad 1 \le i \le j-1,$$

при цьому сума в (5.24), узята для нового розбиття, буде не меншою, і нерівність у (5.24) справджується. Додані точки розбивають відрізок на j рівних частин, для суми по відрізках хоча б з однієї з цих частин матимемо

$$\sum \big|f(x_k) - f(x_{k-1})\big| \geq 1.$$

При цьому сума довжин цих відрізків

$$\sum \big|x_k - x_{k-1}\big| = (b-a)/j,$$

j ми можемо взяти як завгодно великим. Тоді означення 5.6 не справджується при $\varepsilon = 1$. □

Лема 5.4. *Нехай* $f \in \mathbb{AC}([a,b])$, $F(x) = \mathbb{V}(f,[a,x])$. *Тоді* $F \in \mathbb{AC}([a,b])$.

Доведення. Із леми 5.3 випливає, що функція F визначена і скінченна. Візьмемо ε, δ, (a_k, b_k) з означення 5.6, і розглянемо

$$\sum_{k=1}^{n} \big|F(b_k) - F(a_k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(f,[a_k,b_k]). \tag{5.25}$$

Кожне значення варіації $\mathbb{V}(f,[a_k,b_k])$ ми можемо наблизити сумами модулів приростів на неперетинних відрізках:

$$\mathbb{V}(f,[a_k,b_k]) - \sum_{i=1}^{i_k} \big|f(b_k^{(i)}) - f(a_k^{(i)})\big| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad (a_k^{(i)}, b_k^{(i)}) \subset [a_k,b_k]. \tag{5.26}$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i_k} \big|b_k^{(i)} - a_k^{(i)}\big| \leq \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \overset{(5.21)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(5.21)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i_k} \big|f(b_k^{(i)}) - f(a_k^{(i)})\big| < \varepsilon \overset{(5.25),(5.26)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \big|F(b_k) - F(a_k)\big| < 2\varepsilon,$$

і остання нерівність справджується, якщо $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$. Тому $F \in \mathbb{AC}([a,b])$. □

Також нам буде потрібне ще одне допоміжне твердження.

Лема 5.5. *Нехай* λ *— міра на* σ*-алгебрі* $\mathcal{F}$, μ *— скінченна міра на* $\mathcal{F}$. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\mu \ll \lambda$;
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, A \in \mathcal{F},\ \lambda(A) < \delta :\ \mu(A) \leq \varepsilon$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Припустимо, що 2) не справджується, тобто

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, A \in \mathcal{F},\ \lambda(A) < \delta:\ \mu(A) > \varepsilon_0\,.$$

Використовуючи це для $\delta = 2^{-n}$, $n \geq 1$, візьмемо A_n такі, що $\lambda(A_n) < 2^{-n}$, $\mu(A_n) > \varepsilon_0$. Покладемо $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Для кожного $n \geq 1$ маємо

$$\lambda(A) \leq \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) < \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-n} \ \Rightarrow\ \lambda(A) = 0.$$

З іншого боку, використовуючи теорему 2.2 про неперервність міри зверху і скінченність μ, отримуємо

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big),\ \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \geq \mu(A_n) > \varepsilon_0 \Rightarrow \mu(A) \geq \varepsilon_0.$$

Значення мір множини A дають суперечність з умовою $\mu \ll \lambda$.

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай $\lambda(A) = 0$, тоді A задовольняє 2) для будь-якого $\delta > 0$. Тому має бути $\mu(A) \leq \varepsilon$ для даної A для кожного $\varepsilon > 0$. Значить, $\mu(A) = 0$ і $\mu \ll \lambda$. $\square$

5.5. Абсолютна неперервність відносно міри Лебега на $[a, b]$

Для функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ми розглядатимемо заряд ν_f на $\mathcal{B}\big((a, b]\big)$, породжений за цією функцією, як це показано на початку підрозділу 5.4.

Теорема 5.4. *Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має обмежену варіацію і неперервна справа на $[a, b]$. Тоді для заряду ν_f наступні твердження еквівалентні:*

1) $\nu_f \ll \lambda_1$;
2) $f \in \mathbb{AC}([a, b])$.

Доведення. Оскільки f неперервна справа, то неперервними справа є $F(x) = \mathbb{V}(f, [a, x])$ (за лемою 5.2) і $F_1(x) = F(x) - f(x)$ (як різниця неперервних справа функцій). Тому коректно визначеними є міри Лебега–Стілтьєса λ_F і λ_{F_1} та заряд $\nu_f = \lambda_F - \lambda_{F_1}$.

Крок 1. 1) $\Rightarrow$ 2). Оскільки $\nu_f \ll \lambda_1$, то для варіації заряду ми також маємо $\nu_f \ll \lambda_1$ (лема 5.1). Тоді лема 5.5 свідчить про те, що

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, A \in \mathcal{F},\ \lambda_1(A) < \delta:\ |\nu_f|(A) < \varepsilon.$$

Візьмемо тут $A = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$, де $(a_k, b_k] \subset (a, b]$ — довільні неперетинні (це еквівалентно тому, що $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ неперетинні). Тоді з умови

$$\lambda_1(A) < \delta \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

випливає, що

$$|\nu_f|(A) < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |\nu_f|\big((a_k, b_k]\big) < \varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^n \big|\nu_f\big((a_k, b_k]\big)\big| < \varepsilon \overset{(5.20)}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=1}^n \big|f(b_k) - f(a_k)\big| < \varepsilon$$

(у (*) ми використали нерівність $|\nu_f(B)| \le |\nu_f|(B)$ для довільної множини B). Таким чином, для цих δ і ε справджується (5.21), і тому $f \in \mathbb{AC}([a, b])$.

Крок 2. $2) \Rightarrow 1)$, f неспадна. У цьому випадку

$$F(x) = f(x) - f(a), \quad F_1(x) = f(a) = \mathrm{const}, \quad \lambda_{F_1} = 0, \quad \nu_f = \lambda_F,$$

ν_f є мірою.

Візьмемо ε і δ, що задовольняють (5.21) в означенні абсолютної неперервності f. Розглянемо довільну $A \in \mathcal{B}\big((a, b]\big)$, $\lambda_1(A) < \delta$. Значення міри Лебега λ_1 збігається зі значенням відповідної зовнішньої міри λ_1^* (див. підрозділ 2.6). Ураховуючи зауваження 2.3, візьмемо неперетинні $(a_k, b_k] \subset (a, b]$ такі, що

$$A \subset \bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k], \quad \sum_{k=1}^\infty \lambda_1\big((a_k, b_k]\big) = \sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) < \delta.$$

Тоді

$$\forall\, n \ge 1: \; \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \; \overset{(5.21)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^n \big|f(b_k) - f(a_k)\big| < \varepsilon.$$

Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо

$$\sum_{k=1}^\infty \big|f(b_k) - f(a_k)\big| \le \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty \nu_f\big((a_k, b_k]\big) \le \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu_f\Big(\bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k]\Big) \le \varepsilon, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k] \Rightarrow \nu_f(A) \le \varepsilon.$$

Із леми 5.5 маємо $\nu_f \ll \lambda_1$.

Крок 3. $2) \Rightarrow 1)$, f не обов'язково неспадна. За лемою 5.4, $F \in \mathbb{AC}([a,b])$. Тоді властивості 1 і 2 абсолютно неперервних функцій для $F_1 = F - f$ свідчать, що $F_1 \in \mathbb{AC}([a,b])$. Із кроку 2 маємо, що $\lambda_F \ll \lambda_1$, $\lambda_{F_1} \ll \lambda_1$. Тому для $\nu_f = \lambda_F - \lambda_{F_1}$ отримуємо $\nu_f \ll \lambda_1$. $\square$

Приклад 5.7. Нехай функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервно диференційована на $[a,b]$, $|f'(x)| \le L < +\infty$. Із формули Лагранжа маємо

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| = \bigl|f'(\theta)(x-y)\bigr| \le L|x-y|, \quad x,\ y,\ \theta \in [a,b].$$

Отже, f задовольняє умову Ліпшиця, приклад 5.6 показує, що $f \in \mathbb{AC}([a,b])$. Тому $\nu_f \ll \lambda_1$, і в цьому випадку f' є відповідною похідною Радона–Никодима. Звідси

$$\forall\, A \in \mathcal{B}((a,b]) :\ \nu_f(A) = \int_A f'(x)\, d\lambda_1$$

(при $A = (c,d]$ маємо формулу Ньютона–Лейбніца, дві частини рівності як дві міри збігаються на породженій борельовій σ-алгебрі).

Ще одну важливу властивість абсолютно неперервних функцій — *формулу Ньютона–Лейбніца* в загальному випадку— ми наведемо без доведення.

Теорема 5.5. 1) *Нехай* $f \in \mathbb{AC}([a,b])$. *Тоді* $\exists\, f'(x) \pmod{\lambda_1}$ *на* $[a,b]$, $f' \in \mathsf{L}\bigl([a,b],\lambda_1\bigr)$, *і при цьому*

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(t)\, d\lambda_1(t)\,, \quad a \le x \le b.$$

2) *Нехай* $g \in \mathsf{L}\bigl([a,b],\lambda_1\bigr)$,

$$f(x) = \int_{[a,x]} g(t)\, d\lambda_1(t)\,, \quad a \le x \le b.$$

Тоді $f \in \mathbb{AC}([a,b])$, $f'(x) = g(x) \pmod{\lambda_1}$ *на* $[a,b]$.

Доведення тверджень цієї теореми можна знайти, наприклад, у [3, розділ 5], [9, розділ 5], [11, розділ 9].

Приклад 5.8 (функція Кантора)**.** Наведемо приклад неперервної неспадної функції $f : [0,1] \to [0,1]$, що не є абсолютно неперервною на $[0,1]$.

На першому кроці покладемо

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x) = \frac{1}{2},\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}.$$

Функція f залишилася невизначеною на двох відрізках довжиною $1/3$ кожен.

На другому кроці в середній третині кожного з цих відрізків покладемо f рівною півсумі сусідніх зліва і справа вже визначених значень f. Тобто візьмемо

$$f(x) = \frac{1}{4},\ \frac{1}{9} \le x \le \frac{2}{9}, \quad f(x) = \frac{3}{4},\ \frac{7}{9} \le x \le \frac{8}{9}\,.$$

Продовжимо цей процес нескінченно. Перед кожним n-м кроком матимемо 2^{n-1} відрізків, кожен завждовжки $3^{-(n-1)}$, де ще f невизначена. Ми братимемо середню третину кожного з цих відрізків і покладаємо там f рівною півсумі сусідніх раніше визначених значень. Значення, яких ми будемо надавати f "зліва направо"на $[0,1]$ відповідно дорівнюють

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \ldots,\ \frac{2^n-1}{2^n}\,.$$

Після цього кроку міра точок, де f ще не визначена, дорівнює $(2/3)^n$.

У цілому, за цим правилом ми визначимо f в усіх точках відрізка $[0,1]$, крім множини міри 0. У залишених точках покладемо

$$f(x) = \sup\{f(y) \big|\ y < x,\ f(y) \text{ визначена в одному з кроків}\}.$$

Після кожного з кроків отримана f була неспадною, тому і після останнього визначення вона неспадною і залишиться.

Маємо, що $f \in \mathbb{C}([0,1])$, адже f неспадна, а її множина значень щільна на $[0,1]$ (до неї входять усі двійково-раціональні дроби $k2^{-n} \in [0,1]$). Якби в якійсь точці $x \in [0,1]$ f мала стрибок, ми б отримали інтервал із $[0,1]$, що не містить жодного значення f.

Відмітимо, що $f'(x) = 0 \pmod{\lambda_1}$ на $[0,1]$. (Внутрішні точки всіх відрізків, де ми визначали f протягом наших кроків, мають загальну міру 1. В околі кожної такої точки x_0 f стала, тому $f'(x_0) = 0$.) Маємо

$$f(1) - f(0) = 1 \ne \int_{[0,1]} f'(x)\,d\lambda_1 = 0.$$

Оскільки не справджується твердження 1) теореми 5.5, $f \notin \mathbb{AC}([0,1])$.

Вправи

Вправа 5.1. Показати, що для скінченного заряду ν справджуються аналоги теорем про неперевність міри:

1) $A_n \in \mathcal{F},\ A_n \uparrow A \ \Rightarrow\ \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$;

2) $A_n \in \mathcal{F},\ A_n \downarrow A \ \Rightarrow\ \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$.

Вправа 5.2. Нехай ν — заряд і λ — міра такі, що

$$\nu(A) = \int_A f\,d\lambda,\ \ A \in \mathcal{F}.$$

Довести, що

$$|\nu|(A) = \int_A |f|\,d\lambda, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Вправа 5.3. Нехай λ, μ і ν — σ-скінченні міри такі, що $\mu \ll \lambda$ і $\nu \ll \mu$. Довести, що

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \quad (\mathrm{mod}\ \lambda)\,.$$

Вправа 5.4. Нехай

$$g \in \mathsf{L}\big([a,b],\lambda_1\big), \quad f(x) = \int_{[a,x]} g(t)\,d\lambda_1(t), \quad a \le x \le b.$$

Довести, що $f \in \mathbb{AC}([a,b])$.

Вправа 5.5. Нехай $f : [0,1] \to [0,1]$ — функція Кантора (див. приклад 5.8), λ_f — породжена цією функцією міра Лебега–Стілтьєса на $\mathcal{B}([0,1])$. Довести, що $\lambda_f \perp \lambda_1$.

Розділ 6
Інтегрування на добутку просторів

6.1. Множини та функції на добутку просторів

Нехай $(\mathsf{X}_1, \mathcal{F}_1)$ і $(\mathsf{X}_2, \mathcal{F}_2)$ — два вимірних простори. Розглянемо декартів добуток $\mathsf{X} = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$ і, використовуючи σ-алгебри $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, визначимо на ньому такі класи множин.

Означення 6.1. *Вимірними прямокутниками* в X називається клас множин
$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 := \left\{A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2\right\}.$$

Набір множин $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ є півкільцем як декартів добуток півкілець (див. теорему 1.1), і нічого більшого, взагалі кажучи, про цей клас ми стверджувати не можемо. На X σ-алгебру ми визначимо таким чином.

Означення 6.2. *Добутком σ-алгебр* $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ називається клас множин
$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma a(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2).$$

Розглянемо добуток борельових σ-алгебр в $\mathbb{R}^d$. Нагадаємо, що, за теоремою 1.6,
$$\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) = \sigma a(\mathcal{P}_d), \text{ де } \mathcal{P}_d = \left\{\prod_{k=1}^{d} \big(a_k, b_k\big] \ \Big|\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Теорема 6.1. $\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \otimes \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big)$.

Доведення. З одного боку, маємо
$$\prod_{k=1}^{m+n}(a_k, b_k] = \Big(\prod_{k=1}^{m}(a_k, b_k]\Big) \times \Big(\prod_{k=m+1}^{m+n}(a_k, b_k]\Big) \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \times \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big),$$
$$\mathcal{P}_{m+n} \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \times \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \otimes \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) \ - \ \text{σ-алгебра} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma a\big(\mathcal{P}_{m+n}\big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \otimes \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big). \tag{6.1}$$

Тепер отримаємо включення в інший бік.
$$\Big(\prod_{k=1}^{m}(a_k, b_k]\Big) \times \Big(\prod_{k=m+1}^{m+n}(a_k, b_k]\Big) = \prod_{k=1}^{m+n}(a_k, b_k] \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big). \tag{6.2}$$

Для довільного фіксованого $\prod_{k=m+1}^{m+n}(a_k, b_k]$ розглянемо клас множин

$$\mathcal{H}_1 = \Big\{A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) : \ A \times \Big(\prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k]\Big) \ \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big)\Big\}. \tag{6.3}$$

Із (6.2) випливає, що $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{P}_m$. Стандартними діями легко перевіряється, що $\mathcal{H}_1$ замкнений відносно взяття зліченного об'єднання та різниці множин, і тому є σ-алгеброю. Значить,

$$\mathcal{H}_1 \supset \sigma a\big(\mathcal{P}_m\big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big).$$

Тепер для довільної фіксованої $A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) = \mathcal{H}_1$ візьмемо клас множин

$$\mathcal{H}_2 = \Big\{B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) : A \times B \ \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big)\Big\}.$$

Із (6.3) маємо, що $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{P}_n$. Стандартним чином перевіряється, що $\mathcal{H}_2$ — σ-алгебра, тому

$$\mathcal{H}_2 \supset \sigma a\big(\mathcal{P}_n\big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big).$$

Це означає, що

$$\begin{gathered}\forall A \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big), \ B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) : \ A \times B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big) \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \times \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big) \ - \ \sigma\text{-алгебра} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma a\Big(\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \times \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big)\Big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^m\big) \otimes \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^n\big) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{m+n}\big).\end{gathered} \tag{6.4}$$

Із двох протилежних включень (6.1) і (6.4) випливає твердження теореми.
□

Нехай $E \subset \mathsf{X}$, $x_1 \in \mathsf{X}_1$, $x_2 \in \mathsf{X}_2$.

Означення 6.3. x_1-*перерізом* множини $E \subset \mathsf{X}$ називається множина

$$E_{x_1} = \big\{x_2 \in \mathsf{X}_2 : \ (x_1, x_2) \in E\big\}.$$

x_2-*перерізом* множини $E \subset \mathsf{X}$ називається множина

$$E_{x_2} = \big\{x_1 \in \mathsf{X}_1 : \ (x_1, x_2) \in E\big\}.$$

Приклад 6.1. Нехай E — вимірний прямокутник, $E = E_1 \times E_2$, $E_1 \in \mathcal{F}_1$, $E_2 \in \mathcal{F}_2$. Тоді

$$E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1, \\ \varnothing, & x_1 \notin E_1, \end{cases} \qquad E_{x_2} = \begin{cases} E_1, & x_2 \in E_2, \\ \varnothing, & x_2 \notin E_2. \end{cases}$$

Зазначимо, що завжди $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$.

Лема 6.1. *Нехай* $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. *Тоді*

$$\forall\, x_1 \in \mathsf{X}_1,\ x_2 \in \mathsf{X}_2 :\ E_{x_1} \in \mathcal{F}_2, \quad E_{x_2} \in \mathcal{F}_1.$$

Доведення. Доведемо, наприклад, що $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$. Розглянемо клас множин

$$\mathcal{H} = \left\{ E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \middle|\ \forall\, x_1 \in \mathsf{X}_1 :\ E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \right\}.$$

Приклад 6.1 показує, що клас вимірних прямокутників $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{H}$. Крім того, $\mathcal{H}$ — σ-алгебра. Адже для довільних $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, $n \geq 1$, ми маємо

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E^{(n)} \right)_{x_1} \in \mathcal{F}_2$$

як об'єднання елементів σ-алгебри $\mathcal{F}_2$. Аналогічно

$$\left(E^{(1)} \setminus E^{(2)} \right)_{x_1} = \left(E^{(1)} \right)_{x_1} \setminus \left(E^{(2)} \right)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \quad \Rightarrow \quad E^{(1)} \setminus E^{(2)} \in \mathcal{H}.$$

Значить, $\mathcal{H} \supset \sigma a(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. □

Далі для функції $f : \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$, через $f_{x_1}(x_2)$ позначатимемо функцію $f(x_1, x_2)$, у якій x_1 вважається фіксованим, x_2 — аргументом. Аналогічно $f_{x_2}(x_1)$ позначає функцію f, у якій фіксованим є x_2.

Лема 6.2. *Нехай функція* $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$*-вимірна. Тоді*

$$\forall\, x_1 \in \mathsf{X}_1 :\ f_{x_1}\ \ \mathcal{F}_2\text{-вимірна}, \quad \forall\, x_2 \in \mathsf{X}_2 :\ f_{x_2}\ \ \mathcal{F}_1\text{-вимірна}.$$

Доведення. Для довільних $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $x_1 \in \mathsf{X}_1$ маємо

$$\begin{aligned} f_{x_1}^{-1}(B) = \left\{ x_2 \in \mathsf{X}_2 :\ f(x_1, x_2) \in B \right\} = \\ = \left\{ x_2 \in \mathsf{X}_2 :\ (x_1, x_2) \in f^{-1}(B) \right\} = \left(f^{-1}(B) \right)_{x_1}. \end{aligned}$$

Із вимірності f випливає, що $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, за лемою 6.1 $\left(f^{-1}(B) \right)_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, отже, ми отримуємо вказану вимірність f_{x_1}. Аналогічно отримуємо вимірність f_{x_2}:

$$f_{x_2}^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B) \right)_{x_2} \in \mathcal{F}_1.$$ □

6.2. Добуток мір

Розглянемо міру на добутку просторів. Нехай $(\mathsf{X}_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ і $(\mathsf{X}_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ — два вимірних простори з мірами, $\mathsf{X} = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$. Спочатку визначимо міру на класі вимірних прямокутників $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, цей клас є півкільцем підмножин X.

Лема 6.3. *Функція множин*

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

є мірою на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Доведення. Треба довести σ-адитивність μ. Візьмемо неперетинні $E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ такі, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} = E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \quad E = E_1 \times E_2, \quad E^{(n)} = E_1^{(n)} \times E_2^{(n)}.$$

Тоді для $x = (x_1, x_2) \in \mathsf{X}$, $x_1 \in \mathsf{X}_1$, $x_2 \in \mathsf{X}_2$ маємо

$$\mathbf{1}_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E^{(n)}}(x) \Leftrightarrow \mathbf{1}_{E_1}(x_1)\mathbf{1}_{E_2}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1)\mathbf{1}_{E_2^{(n)}}(x_2).$$

Для кожного фіксованого $x_1 \in \mathsf{X}_1$ проінтегруємо дві частини останньої рівності на X_2 за мірою μ_2. Використовуючи наслідок 4.1 про інтегрування функціонального ряду, отримаємо

$$\mathbf{1}_{E_1}(x_1)\mu_2(E_2) = \int_{\mathsf{X}_2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1)\mathbf{1}_{E_2^{(n)}}(x_2)\Big) d\mu_2(x_2) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1) \int_{\mathsf{X}_2} \mathbf{1}_{E_2^{(n)}}(x_2) d\mu_2(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1)\mu_2\big(E_2^{(n)}\big).$$

Цю рівність проінтегруємо на X_1 за мірою μ_1. Знову використовуючи наслідок 4.1, матимемо

$$\mu_1(E_1)\mu_2(E_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1\big(E_1^{(n)}\big)\mu_2\big(E_2^{(n)}\big) \Leftrightarrow \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(E^{(n)}\big). \qquad \square$$

Лема 6.3 обґрунтовує коректність наступного означення.

Означення 6.4. *Добутком мір* μ_1 і μ_2 називається продовження за Каратеодорі міри

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2),$$

визначеної на півкільці $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Цей добуток мір позначатимемо через $\mu_1 \times \mu_2$, відповідний клас вимірних множин — через $\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$. Оскільки $\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$ — σ-алгебра, що містить початкове півкільце $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, то

$$\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \sigma a\big(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\big) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2\,.$$

Відмітимо, що клас $\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$ залежить від мір, які ми розглядаємо на $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, а набір $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ визначається лише за самими σ-алгебрами.

Приклад 6.2. Покажемо, що для мір Лебега виконується $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$. Для множини $E \in \mathcal{P}_{m+n}$ маємо

$$E = \prod_{k=1}^{m+n} (a_k, b_k] = \Big(\prod_{k=1}^{m} (a_k, b_k] \Big) \times \Big(\prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k] \Big),$$

$$\lambda_{m+n}(E) = (\lambda_m \times \lambda_n)(E) = \prod_{k=1}^{m+n} (b_k - a_k)\,.$$

Продовження за Каратеодорі цих двох мір, визначених на $E \in \mathcal{P}_{m+n}$ дасть один і той самий результат — λ_{m+n} на $\mathcal{S}_{m+n}$.

Залишається показати, що продовження $\lambda_m \times \lambda_n$ із двох різних півкілець $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$ і $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$ приводить до однієї міри. Дійсно, для $E \subset \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$, для продовження із $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$, використовуючи відповідну зовнішню міру, маємо

$$(\lambda_m \times \lambda_n)^*(E) \overset{(2.14)}{=} \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1\big(E_1^{(k)}\big) \lambda_2\big(E_2^{(k)}\big) \Big|\ E_1^{(k)} \in \mathcal{S}_m,$$
$$E_2^{(k)} \in \mathcal{S}_n,\ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_1^{(k)} \times E_2^{(k)}\big) \Big\}.$$

Тут $E_1^{(k)} \in \mathcal{S}_m$ і зі схеми продовження за Каратеодорі випливає, що $\lambda_1\big(E_1^{(k)}\big)$ можна як завгодно близько наблизити сумами вигляду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(A_1^{(i)}), \quad A_1^{(i)} \in \mathcal{P}_m, \quad E_1^{(k)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_1^{(i)},$$

аналогічне наближення справджується для $E_2^{(k)} \in \mathcal{S}_n$. Тому

$$(\lambda_m \times \lambda_n)^*(E) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1\big(A_1^{(i)}\big) \lambda_2\big(A_2^{(i)}\big) \Big|\ A_1^{(i)} \in \mathcal{P}_m,$$
$$A_2^{(i)} \in \mathcal{P}_n,\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(A_1^{(i)} \times A_2^{(i)}\big) \Big\}.$$

Значить, для продовжень з обох півкілець $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$ і $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$ ми отримуємо однакове значення зовнішньої міри, а тому збігаються класи вимірних множин і значення отриманих мір.

Теорема 6.2. *Нехай міри* μ_1 *на* $\mathcal{F}_1$ *і* μ_2 *на* $\mathcal{F}_2$ *σ-скінченні й повні,* $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$, $E \in \mathcal{F}$. *Тоді*

1) $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$;
2) $\mu_2(E_{x_1})$ $\mathcal{F}_1$*-вимірна як функція аргументу* $x_1 \in \mathsf{X}_1$;
3) $\mu(E) = \int_{\mathsf{X}_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1)$.

Приклад 6.3. Покладемо $\mathsf{X}_1 = \mathsf{X}_2 = \mathbb{R}$, σ-алгебри $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і міри μ_1, μ_2 — лебегові, $f \in \mathbb{C}([a,b])$ — невід'ємна функція. Розглянемо

$$E = \{(x_1, x_2) \in [a,b] \times \mathbb{R} :\ 0 \le x_2 \le f(x_1)\}.$$

Тоді

$$E_{x_1} = \begin{cases} [0, f(x_1)],\ x_1 \in [a,b], \\ \varnothing,\ x_1 \notin [a,b], \end{cases} \qquad \mu_2(E_{x_1}) = \begin{cases} f(x_1),\ x_1 \in [a,b], \\ 0,\ x_1 \notin [a,b], \end{cases}$$

$$\int_{\mathsf{X}_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{[a,b]} f(x_1)\, d\mu_1(x_1).$$

Ми бачимо, що справджуються твердження 1) і 2) теореми 6.2, а твердження 3) цієї теореми є узагальненням формули площі криволінійної трапеції.

Доведення теореми 6.2. Нехай $\mathcal{H}$ — клас множин з $\mathcal{F}$, для яких справджуються твердження 1), 2) і 3) теореми. Припустимо спочатку, що міри μ_1 і μ_2 скінченні.

Крок 1. Доведемо, що $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{H}$. Розглянемо $E = E_1 \times E_2$, $E_1 \in \mathcal{F}_1$, $E_2 \in \mathcal{F}_2$. у цьому випадку

$$E_{x_1} = \begin{cases} E_2,\ x_1 \in E_1, \\ \varnothing,\ x_1 \notin E_1, \end{cases}$$

обидва можливі перерізи належать $\mathcal{F}_2$, тому 1) справджується. Далі маємо

$$\mu_2(E_{x_1}) = \begin{cases} \mu_2(E_2),\ x_1 \in E_1, \\ 0,\ x_1 \notin E_1, \end{cases}$$

функція $\mu_2(E_{x_1})$ $\mathcal{F}_1$-вимірна як проста зі сталими значеннями на множинах з $\mathcal{F}_1$, тому виконується 2). Знаходимо інтеграл від цієї простої функції й отримуємо

$$\int_{\mathsf{X}_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) = \mu(E).$$

Отже, для цієї множини справджується і 3).

Крок 2. Доведемо, що $\sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{H}$. Спочатку покажемо, що

$$E^{(k)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{H}, \quad E^{(k)} \text{ неперетинні } \Rightarrow \; E = \bigcup_{k=1}^{n} E^{(k)} \in \mathcal{H}.$$

Адже в цьому випадку $E_{x_1} = \bigcup_{k=1}^{n} E_{x_1}^{(k)} \in \mathcal{F}_2$ як об'єднання елементів $\mathcal{F}_2$. Також функція $\mu_2(E_{x_1}) = \sum_{k=1}^{n} \mu_2(E_{x_1}^{(k)})$ $\mathcal{F}_1$-вимірна як сума вимірних. Проінтегрувавши останню рівність і використавши 3) для $E^{(k)}$, маємо

$$\int_{\mathsf{X}_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathsf{X}_1} \mu_2(E_{x_1}^{(k)})\, d\mu_1(x_1) \overset{3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu(E^{(k)}) = \mu(E)\,.$$

Тому для E справджується і 3), $E \in \mathcal{H}$. Отже, в $\mathcal{H}$ входять всі множини породженого кільця $k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ (див. теорему 1.3).

Тепер зазначимо, що

$$E^{(k)} \in \mathcal{H}, \quad E^{(k)} \uparrow, \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(k)} \;\Rightarrow\; E \in \mathcal{H}.$$

Адже тоді $E_{x_1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{x_1}^{(k)}$ — об'єднання елементів $\mathcal{F}_1$, $\mu_2(E_{x_1}) \overset{\text{Теорема 2.1}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_2(E_{x_1}^{(k)})$ — границя $\mathcal{F}_1$-вимірних функцій, рівність 3) для E отримується граничним переходом при $k \to \infty$ з відповідних рівностей, записаних для $E^{(k)}$ (тут використовуємо теорему 4.4).

Аналогічно, згідно з теоремами 2.1 і 4.7, маємо

$$E^{(k)} \in \mathcal{H}, \quad E^{(k)} \downarrow, \quad E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E^{(k)} \;\Rightarrow\; E \in \mathcal{H}.$$

Таким чином, $\mathcal{H}$ — монотонний клас, що містить кільце $k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Тому $\mathcal{H}$ містить монотонний клас, породжений цим кільцем, тобто σ-кільце $\sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ (див. теорему 1.5).

Крок 3. Доведемо, що $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Відмітимо, що

$$\forall\, E \in \mathcal{F}\; \exists\, A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{H}: \; E \subset A, \; \mu(A \setminus E) = 0. \tag{6.5}$$

Адже μ отримана за схемою Каратеодорі з півкільця $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, μ на $\mathcal{F}$ збігається з породженою зовнішньою мірою (див. означення 2.5), і для кожного $j \geq 1$ існує покриття

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(kj)}, \quad E^{(kj)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E^{(kj)}) < \mu(E) + \frac{1}{j}\,.$$

Візьмемо множину $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(kj)}$. Тоді $E \subset A$,

$$\forall j \geq 1: \ \mu(A) - \mu(E) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(kj)}\Big) - \mu(E) < \frac{1}{j} \Rightarrow \mu(A \setminus E) = 0,$$

і (6.5) справджується.

Розглянемо $E \in \mathcal{F}$ таку, що $\mu(E) = 0$, і візьмемо множину A з (6.5). Тоді $A \in \mathcal{H}$, $\mu(A) = 0$, і, за твердженням 3), виконується

$$0 = \mu(A) = \int_{\mathsf{X}_1} \mu_2\big(A_{x_1}\big)\, d\mu_1(x_1).$$

Властивість 11 інтеграла дає, що $\mu_2\big(A_{x_1}\big) = 0 \pmod{\mu_1}$. Оскільки $E_{x_1} \subset A_{x_1}$, а міра μ_1 повна

$$\forall x_1 \in \mathsf{X}_1, \ \mu_2\big(A_{x_1}\big) = 0: \ E_{x_1} \in \mathcal{F}_2, \quad \mu_2\big(E_{x_1}\big) = 0.$$

Тому $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$. Також $\mu_2\big(E_{x_1}\big) = 0 \pmod{\mu_1}$, тотожний нуль є $\mathcal{F}_1$-вимірною функцією, міра μ_1 повна, і з теореми 3.7 ми отримуємо, що функція $\mu_2\big(E_{x_1}\big)$ $\mathcal{F}_1$-вимірна. Крім того,

$$\int_{\mathsf{X}_1} \mu_2\big(E_{x_1}\big)\, d\mu_1(x_1) = 0 = \mu(E).$$

Звідси $E \in \mathcal{H}$.

Тепер візьмемо довільну множину $E \in \mathcal{F}$ і для неї множину A з (6.5). Тоді

$$\begin{gathered}
E = A \setminus (A \setminus E), \quad \mu(A \setminus E) = 0 \ \Rightarrow \ A \setminus E \in \mathcal{H}, \\
E_{x_1} = A_{x_1} \setminus (A \setminus E)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}, \\
\mu_2\big(E_{x_1}\big) = \mu_2\big(A_{x_1}\big) - \mu_2\big((A \setminus E)_{x_1}\big) \pmod{\mu_1} \overset{(*)}{\Rightarrow} \mu_2\big(E_{x_1}\big)\ \mathcal{F}_1\text{-вимірна}, \\
\int_{\mathsf{X}_1} \mu_2\big(E_{x_1}\big)\, d\mu_1 = \int_{\mathsf{X}_1} \mu_2\big(A_{x_1}\big)\, d\mu_1 - \int_{\mathsf{X}_1} \mu_2\big((A \setminus E)_{x_1}\big)\, d\mu_1 \overset{3)}{=} \\
\overset{3)}{=} \mu(A) - \mu(A \setminus E) = \mu(E)
\end{gathered}$$

(тут у (*) ми використали 2) і те, що μ_1 — повна, і тому при переході до еквівалентної функції вимірність зберігається). Отже, $E \in \mathcal{H}$, для довільної множини з $\mathcal{F}$ справджуються твердження 1), 2) і 3).

Крок 4. Нехай μ_1 і μ_2 σ-скінченні. Візьмемо множини $\mathsf{X}_1^{(n)} \in \mathcal{F}_1$, на яких скінченною є μ_1, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_1^{(n)} = \mathsf{X}_1$, і множини $\mathsf{X}_2^{(n)} \in \mathcal{F}_2$, на яких скінченною є μ_2, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_2^{(n)} = \mathsf{X}_2$. Перейдемо до неспадних послідовностей множин

$$\mathsf{Y}_1^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathsf{X}_1^{(k)}, \quad \mathsf{Y}_2^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathsf{X}_2^{(k)}, \quad \mathsf{Y}^{(n)} = \mathsf{Y}_1^{(n)} \times \mathsf{Y}_2^{(n)}.$$

На кожній із множин $\mathsf{Y}_1^{(n)}$ є скінченною μ_1, на $\mathsf{Y}_2^{(n)}$ — μ_2. Як випливає з кроків 1,2,3, для множини $E \cap \mathsf{Y}^{(n)}$, $E \in \mathcal{F}$, справджуються твердження 1), 2) і 3) нашої теореми, $E \cap \mathsf{Y}^{(n)} \uparrow E$. Взявши границю при $n \to \infty$, використовуючи неперервність міри μ_2 знизу і теорему 4.4 про інтегрування монотонної послідовності, отримаємо 1), 2) і 3) для E. $\square$

6.3. Теореми Тонеллі і Фубіні

Нехай, як і раніше, $(\mathsf{X}_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ і $(\mathsf{X}_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ — два вимірних простори з мірами, $\mathsf{X} = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$. У цьому підрозділі ми отримаємо, що інтеграл за $\mu_1 \times \mu_2$ дорівнює повторному інтегралу за μ_1 і μ_2.

Теорема 6.3 (теорема Тонеллі). *Нехай міри μ_1 і μ_2 σ-скінченні й повні, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$, функція $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$-вимірна і невід'ємна. Тоді*

1) f_{x_1} $\mathcal{F}_2$-*вимірна* $\pmod{\mu_1}$;

2) $g(x_1) = \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$ $\mathcal{F}_1$-*вимірна*;

3) $\int_{\mathsf{X}} f(x_1, x_2)\, d\mu(x_1, x_2) = \int_{\mathsf{X}_1} d\mu_1(x_1) \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$.

Доведення. Для $f = \mathbf{1}_E$, $E \in \mathcal{F}$, твердження 1), 2) і 3) теореми 6.3 безпосередньо випливають із тверджень 1), 2) і 3) теореми 6.2 відповідно. Адже ми маємо, що $f_{x_1} = \mathbf{1}_{E_{x_1}}$, і при $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ індикатор буде $\mathcal{F}_2$-вимірним. Також тут $g(x_1) = \mu_2\big(E_{x_1}\big)$,

$$\int_{\mathsf{X}_1} d\mu_1(x_1) \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \int_{\mathsf{X}_1} \mu_2\big(E_{x_1}\big)\, d\mu_1(x_1) = \mu(E) = \int_{\mathsf{X}} f\, d\mu\,.$$

Якщо 1), 2) і 3) справджуються для двох функцій $f^{(1)}$ і $f^{(2)}$, то, як легко бачити, вони мають місце для $f^{(1)} + f^{(2)}$ і $cf^{(1)}$, $c \in \mathbb{R}$. Значить, вони справджуються для всіх простих невід'ємних $\mathcal{F}$-вимірних функцій на X.

Для довільної невід'ємної вимірної f візьмемо прості невід'ємні вимірні $p^{(n)} \uparrow f$. Тоді $p_{x_1}^{(n)} \uparrow f_{x_1}$, f_{x_1} є $\mathcal{F}_2$-вимірною для x_1, для яких вимірними є всі $p^{(n)}$, тому справджується 1). Записавши 2) і 3) для $p^{(n)}$, граничним переходом за n ми отримаємо 2) і 3) для f. $\square$

Теорема 6.4 (теорема Фубіні). *Нехай міри μ_1 і μ_2 σ-скінченні й повні, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu)$. Тоді*

1) $f_{x_1} \in \mathsf{L}(\mathsf{X}_2, \mu_2) \pmod{\mu_1}$;

2) $g(x_1) = \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) \ \in \mathsf{L}(\mathsf{X}_1, \mu_1)$;

3) $\int_{\mathsf{X}} f(x_1, x_2)\, d\mu(x_1, x_2) = \int_{\mathsf{X}_1} d\mu_1(x_1) \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок невід'ємної f. $\mathcal{F}_2$-вимірність f_{x_1} і $\mathcal{F}_1$-вимірність g випливають із теореми 6.3. Також

$$f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu) \Rightarrow \int_{\mathsf{X}} f\, d\mu < +\infty \overset{\text{Теорема } 6.3}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\text{Теорема } 6.3}{\Longrightarrow} \int_{\mathsf{X}_1} d\mu_1 \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}\, d\mu_2 = \int_{\mathsf{X}_1} g\, d\mu_1 < +\infty \Rightarrow g \in \mathsf{L}(\mathsf{X}_1, \mu_1)\,.$$

Крім того, звідси отримуємо

$$g < +\infty \pmod{\mu_1} \Leftrightarrow \int_{\mathsf{X}_2} f_{x_1}\, d\mu_2 < +\infty \pmod{\mu_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{x_1} \in \mathsf{L}(\mathsf{X}_2, \mu_2) \pmod{\mu_1}\,.$$

Твердження 3) нашої теореми для $f \geq 0$ збігається з відповідним твердженням із теореми Тонеллі.

Тепер нехай $f \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu)$ не обов'язково невід'ємна. Тоді $f = f_+ - f_-$, $f_+,\ f_- \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \mu)$. Записавши твердження нашої теореми для f_+ і f_- і розглянувши різниці функцій, ми отримаємо потрібні твердження для f. При цьому використовуємо рівність $f_{x_1} = (f_+)_{x_1} - (f_-)_{x_1}$, і для інтегровних функцій справджується лінійність інтеграла. □

Вправи

Вправа 6.1. Нехай μ_1 і μ_2 — σ-скінченні міри. Довести, що міра $\mu_1 \times \mu_2$ σ-скінченна.

Вправа 6.2. Нехай $A \subset [0, 1]$ — множина, невимірна за Лебегом. Довести, що $A \times \{0\} \in \mathcal{S}_2,\ A \times \{0\} \notin \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_1$.

Вправа 6.3. Для довільного вимірного простору з мірою $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ і $\mathcal{F}$-вимірної функції $f : \mathsf{X} \to [0, +\infty)$ довести, що

$$\int_{\mathsf{X}} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,\infty)} \lambda\big(\{x :\ f(x) > t\}\big)\, d\lambda_1(t)\,.$$

Вправа 6.4. Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — вимірний простір із σ-скінченною мірою, λ_1 — міра Лебега на $\mathbb{R}$, функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-вимірна. Графіком функції f називається множина

$$\Gamma = \big\{(x, y) \in \mathsf{X} \times \mathbb{R} :\ y = f(x)\big\} \subset \mathsf{X} \times \mathbb{R}.$$

Довести, що $\Gamma \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ і $(\lambda \times \lambda_1)(\Gamma) = 0$.

Розділ 7
Простори інтегровних функцій

7.1. Нерівності Гельдера і Мінковського

У цьому підрозділі ми отримаємо дві важливі нерівності для інтегралів. Почнемо з простого допоміжного твердження.

Лема 7.1. *Нехай* $a,\, b \geq 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p,\, q > 1$. *Тоді*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Доведення. Цю нерівність доведемо за допомогою похідної. Розглянемо

$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab,\ a \geq 0 \Rightarrow f'(a) = a^{p-1} - b.$$

Значить, f спадає для $a \leq b^{\frac{1}{p-1}}$, зростає для $a \geq b^{\frac{1}{p-1}}$, і тому

$$\min_{a\geq 0} f(a) = f\big(b^{\frac{1}{p-1}}\big) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^q\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\Big) = 0$$

(тут використано, що $\frac{p}{p-1} = q \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Отже $f(a) \geq 0$ для всіх $a \geq 0$. □

Нехай $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — вимірний простір із мірою. Для $\mathcal{F}$-вимірної $f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ і $p \geq 1$ використовуватимемо позначення

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Теорема 7.1 (нерівність Гельдера). *Нехай функції* $f,\, g : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$*-вимірні, числа* $p,\, q > 1$ *такі, що* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тоді*

$$\int_{\mathsf{X}} |fg| \, d\lambda \leq \Big(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathsf{X}} |g|^q \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{7.1}$$

Доведення. Треба довести, що

$$\int_{\mathsf{X}} |fg| \, d\lambda \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{7.2}$$

Якщо $\|f\|_p = 0$, то, за властивістю 11 інтеграла, виконується $|f| = 0 \pmod{\lambda}$, і (7.2) справджується. Аналогічно — для випадку $\|g\|_q = 0$. Тому далі ми можемо вважати, що $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$.

Якщо $\|f\|_p = +\infty$ або $\|g\|_q = +\infty$, то права частина (7.2) дорівнює $+\infty$, нерівність справджується, і цей випадок ми також далі не розглядаємо.

В усіх інших випадках (7.2) еквівалентна нерівності

$$\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \, d\lambda \le 1.$$

За лемою 7.1,

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \le \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q .$$

Узявши інтеграл від обох частин цієї нерівності, отримаємо

$$\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \, d\lambda \le \frac{1}{p\,(\|f\|_p)^p} \int_X |f|^p \, d\lambda + \frac{1}{q\,(\|g\|_q)^q} \int_X |g|^q \, d\lambda = \\ = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

Теорема 7.2 (нерівність Мінковського). *Для $\mathcal{F}$-вимірних $f,\ g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ і $p \ge 1$ справджується*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p . \tag{7.3}$$

Доведення. Для $p = 1$ маємо, що $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\lambda$, тоді (7.3) записується як

$$\int_X |f + g| \, d\lambda \le \int_X |f| \, d\lambda + \int_X |g| \, d\lambda,$$

а ця нерівність випливає з того, що $|f + g| \le |f| + |g|$.

Далі вважаємо, що $p > 1$ і візьмемо q таке, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Маємо

$$\begin{aligned}
\big(\|f + g\|_p\big)^p &= \int_X |f + g|^p \, d\lambda = \int_X |f + g|^{p-1} |f + g| \, d\lambda \le \\
&\le \int_X |f + g|^{p-1} |f| \, d\lambda + \int_X |f + g|^{p-1} |g| \, d\lambda \overset{(*)}{\le} \\
&\overset{(*)}{\le} \Big(\int_X |f + g|^{(p-1)q} \, d\lambda \Big)^{1/q} \Big(\int_X |f|^p \, d\lambda \Big)^{1/p} + \\
&+ \Big(\int_X |f + g|^{(p-1)q} \, d\lambda \Big)^{1/q} \Big(\int_X |g|^p \, d\lambda \Big)^{1/p} \overset{(**)}{=} \\
&\overset{(**)}{=} \big(\|f + g\|_p\big)^{p/q} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Тут у (*) ми для кожного з двох інтегралів застосували нерівність Гельдера, в (**) використали рівність $(p-1)q = p$. Тепер скоротимо (7.4) на $\left(\|f+ +g\|_p\right)^{p/q}$, відмітимо, що $p - \frac{p}{q} = 1$, і отримаємо (7.3) (зауважимо, що для випадку $\|f+g\|_p = 0$ нерівність (7.3) є очевидною). $\square$

7.2. Простір L_p

Як і раніше, $(\mathsf{X}, \mathcal{F}, \lambda)$ — вимірний простір із мірою, і для $p \geq 1$ ми розглянемо множину функцій

$$\tilde{\mathsf{L}}_p(\mathsf{X}, \lambda) = \left\{ f : \mathsf{X} \to \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, f\ \mathcal{F}\text{-вимірна},\ |f|^p \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda) \right\}.$$

У $\tilde{\mathsf{L}}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ введемо таке відношення еквівалентності:

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; f = g \quad (\operatorname{mod} \lambda).$$

Очевидно, справджуються наступні властивості:

1) $f \sim f$;
2) $f \sim g \;\Leftrightarrow\; g \sim f$;
3) $f \sim g,\ g \sim h \Rightarrow\ f \sim h$.

Як відомо, таке відношення розбиває множину $\tilde{\mathsf{L}}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ на класи еквівалентності.

Означення 7.1. *Простором* $\mathsf{L}_p = \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$, $p \geq 1$, називається множина класів еквівалентності, отримана з $\tilde{\mathsf{L}}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ за допомогою відношення еквівалентності $f \sim g \;\Leftrightarrow f = g \ (\operatorname{mod} \lambda)$.

Розглядаючи елементи L_p, зазвичай, беруть якусь функцію за представника всього класу еквівалентності й вважають, що елементами L_p є функції. При цьому вважаються однаковими представниками функції, що збігаються майже скрізь. Лінійні операції з елементами L_p — це операції зі взятими функціями (відмітимо, що як представник класу береться функція, що не має нескінченних значень — це важливо для лінійних операцій. Якщо $|f|^p \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$, то $|f| < +\infty \ (\operatorname{mod} \lambda)$, і відповідна функція, еквівалентна f, існує).

Наша подальша мета — дослідити L_p як нормований простір. Нагадаємо відповідне означення.

Нехай L — довільний лінійний простір над числовим полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Означення 7.2. *Нормою* на L називається функція $\|\cdot\| :\ \mathsf{L} \to \mathbb{R}$ така, що

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ в L;
2) $\|cx\| = |c|\|x\|$, $c \in \mathbb{K}$;
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

При цьому $(\mathsf{L}, \|\cdot\|)$ називається *нормованим простором*.

У нормованому просторі можна ввести метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Збіжність у $(\mathsf{L}, \|\cdot\|)$ — це збіжність в (L, ρ) (тобто $x_n \to x \Leftrightarrow \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$). Повнота, сепарабельність нормованого простору — це повнота, сепарабельність відповідного метричного простору.

Нормований простір $(\mathsf{L}, \|\cdot\|)$ називається дійсним або комплексним у випадках $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ відповідно. Далі ми розглядаємо лише дійсні простори.

Для елементів L_p ми вживатимемо вже відоме нам позначення

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}$$

(знову відмітимо, що тут елемент L_p розглядаємо як функцію, при заміні f на еквівалентну функцію значення $\|f\|_p$ не зміниться). Вимірна функція f належить L_p, коли $\|f\|_p < +\infty$.

Лема 7.2. $(\mathsf{L}_p\,, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < +\infty$, *є дійсним нормованим простором.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що L_p — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$. Якщо $f,\ g \in \mathsf{L}_p$, то $\|f\|_p,\ \|g\|_p < +\infty$, нерівність Мінковського (7.3) тоді свідчить про те, що $\|f + g\|_p < +\infty$, і тому $f + g \in \mathsf{L}_p$. Також, очевидно, що тоді $\|cf\|_p < +\infty$, $c \in \mathbb{R}$, і тому $cf \in \mathsf{L}_p$.

Тепер перевіримо, що для $\|\cdot\|_p$ справджуються всі три умови з означення норми.

Справджується 1): очевидною є нерівність $\|f\|_p \ge 0$, а якщо $\|f\|_p = 0$, то $\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda = 0$, із властивості 11 інтеграла випливає, що $f = 0 \pmod{\lambda}$, тому $f = 0$ як елементи L_p.

Легко бачити, що виконується 2):

$$\|cf\|_p = |c| \|f\|_p \;\Leftrightarrow\; \Big(\int_{\mathsf{X}} |cf|^p \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}} = |c| \Big(\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Умова 3) для $\|\cdot\|_p$ — це нерівність Мінковського (7.3). □

Лема 7.3 (нерівність Чебишова). *Для $\mathcal{F}$-вимірної функції і довільного $\varepsilon > 0$ буде*

$$\lambda\big(\{x \in \mathsf{X} : \ |f(x)| \ge \varepsilon\}\big) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathsf{X}} |f| \, d\lambda \,. \tag{7.5}$$

Доведення. Маємо, що

$$\int_{\mathsf{X}} |f| \, d\lambda \ge \int_{\{|f| \ge \varepsilon\}} |f| \, d\lambda \ge \int_{\{|f| \ge \varepsilon\}} \varepsilon \, d\lambda = \varepsilon \lambda\big(\{|f| \ge \varepsilon\}\big) \,.$$ □

Теорема 7.3. *Нормований простір $(\mathsf{L}_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < +\infty$, є повним.*

Доведення. Візьмемо послідовність $f_n \in \mathsf{L}_p$, $n \ge 1$, що є фундаментальною, тобто
$$\|f_n - f_m\|_p \to 0, \quad n,\ m \to \infty. \tag{7.6}$$
Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо
$$\lambda\big(\{x \in \mathsf{X} :\ |f_n(x) - f_m(x)|^p \ge \varepsilon\}\big) \overset{(7.5)}{\le} \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathsf{X}} |f_n - f_m|^p \, d\lambda =$$
$$= \big(\|f_n - f_m\|_p\big)^p \to 0, \quad n,\ m \to \infty.$$
Тому послідовність f_n, $n \ge 1$, є фундаментальною за мірою (див. означення 3.11). За теоремою 3.14, тоді знайдуться вимірна функція $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ та підпослідовність f_{n_k}, $k \ge 1$, такі, що $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$, $k \to \infty$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Із фундаментальності f_n, $n \ge 1$, у L_p випливає, що
$$\exists\, k_0\ \forall\, k,\ l \ge k_0 :\ \big\|f_{n_k} - f_{n_l}\big\|_p \le \varepsilon \Leftrightarrow \int_{\mathsf{X}} \big|f_{n_k} - f_{n_l}\big|^p \, d\lambda \le \varepsilon^p.$$
Із застосуванням теореми Фату (теорема 4.6), для $k \ge k_0$ отримуємо
$$\int_{\mathsf{X}} \big|f_{n_k} - f\big|^p \, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} \lim_{l\to\infty} \big|f_{n_k} - f_{n_l}\big|^p \, d\lambda = \int_{\mathsf{X}} \underline{\lim}_{\, l\to\infty} \big|f_{n_k} - f_{n_l}\big|^p \, d\lambda \overset{(4.24)}{\le}$$
$$\overset{(4.24)}{\le} \underline{\lim}_{\, l\to\infty} \int_{\mathsf{X}} \big|f_{n_k} - f_{n_l}\big|^p \, d\lambda \le \varepsilon^p < +\infty\,. \tag{7.7}$$
Звідси, зокрема, випливає, що $\big(f_{n_k} - f\big) \in \mathsf{L}_p$. Оскільки L_p — лінійний простір і $f_{n_k} \in \mathsf{L}_p$, маємо $f \in \mathsf{L}_p$.

Також у (7.7) отримано, що для $k \ge k_0$ виконується
$$\int_{\mathsf{X}} \big|f_{n_k} - f\big|^p \, d\lambda \le \varepsilon^p \Leftrightarrow \big\|f_{n_k} - f\big\|_p \le \varepsilon.$$
Відповідне k_0 вибрано для довільного зафіксованого $\varepsilon > 0$. Тим самим ми перевірили означення границі числової послідовності для збіжності
$$\big\|f_{n_k} - f\big\|_p \to 0, \quad k \to \infty. \tag{7.8}$$

Залишилося переконатися у тому, що вся послідовність f_n, $n \ge 1$, збігається до цієї f. Для кожного $n \ge 1$ довільним чином візьмемо елемент нашої підпослідовності $f_{n_{k(n)}}$ такий, що $n_k(n) \ge n$. Тоді при $n \to \infty$ справджується $n_k(n) \to \infty$, і ми отримаємо
$$\|f_n - f\|_p \le \|f_n - f_{n_{k(n)}}\|_p + \|f_{n_{k(n)}} - f\|_p,$$
$$\|f_n - f_{n_{k(n)}}\|_p \overset{(7.6)}{\to} 0, \quad \|f_{n_{k(n)}} - f\|_p \overset{(7.8)}{\to} 0, \quad n \to \infty, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0 \Rightarrow f_n \to f, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

7.3. Щільні підмножини L_p

У попередньому підрозділі ми довели повноту нормованого простору L_p, у цьому підрозділі дослідимо деякі питання, пов'язані з його сепарабельністю, можливістю наближень елементів L_p функціями з певних класів.

Відмітимо, що нормований простір $(\mathsf{L}, \|\cdot\|)$ називається *сепарабельним*, якщо в ньому існує зліченна скрізь щільна множина. Множина $\mathsf{M} \subset \mathsf{L}$ називається скрізь щільною, якщо

$$\forall x \in \mathsf{L},\ \varepsilon > 0\ \exists y \in \mathsf{M}:\ \|x - y\| < \varepsilon\,.$$

Теорема 7.4. *Для будь-яких $f \in \mathsf{L}_p$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться проста функція $q \in \mathsf{L}_p$ така, що $\|f - q\|_p < \varepsilon$.*

Доведення. **Крок 1.** Нехай $f \geq 0$. Тоді, за теоремою 3.6, існують прості невід'ємні вимірні функції q_n такі, що $q_n \uparrow f$. Маємо

$$0 \leq f - q_n \leq f \Rightarrow |f - q_n|^p \leq |f|^p, \quad \lim_{n\to\infty} |f(x) - q_n(x)|^p = 0.$$

Використаємо теорему Лебега про мажоровану збіжність (теорема 4.7), взявши мажорантою $|f|^p \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$, отримаємо

$$\int_{\mathsf{X}} |f - q_n|^p\, d\lambda \to 0 \Leftrightarrow \|f - q_n\|_p \to 0,\ n \to \infty.$$

Серед цих q_n знайдеться функція q така, що $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

Крок 2. Нехай f не обов'язково невід'ємна. Тоді $f = f_+ - f_-$, де $f_+,\ f_- \geq 0$. За кроком 1, існують прості q_+ і $q_- \in \mathsf{L}_p$ такі, що

$$\|f_+ - q_+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f_- - q_-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Візьмемо $q = q_+ - q_-$. Функція q проста і, оскільки простір L_p лінійний, $q \in \mathsf{L}_p$. Також маємо

$$\|f - q\|_p = \|(f_+ - q_+) - (f_- - q_-)\|_p \leq \|f_+ - q_+\|_p + \|f_- - q_-\|_p < \varepsilon. \ \square$$

За певних умов ми можемо звузити клас простих функцій, що наближають $f \in \mathsf{L}_p$.

Теорема 7.5. *Нехай $\mathcal{P}$ — таке півкільце множин, що $\mathcal{F} = \sigma k(\mathcal{P})$, а міра λ σ-скінченна на $\mathcal{P}$. Тоді для будь-яких $f \in \mathsf{L}_p$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться проста функція*

$$q \in \mathsf{L}_p\,, \quad q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad A_k \in \mathcal{P}, \tag{7.9}$$

така, що $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

Доведення. **Крок 1.** Нехай $f = \mathbf{1}_C$, $C \in \mathcal{F}$. Маємо

$$\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathsf{X}} \big(\mathbf{1}_C\big)^p \, d\lambda = \lambda(C) < +\infty.$$

За теоремою про наближення міри її значеннями на кільці (теорема 2.9), знайдеться $B \in k(\mathcal{P})$ таке, що $\lambda\big(C \Delta B\big) < \varepsilon^p$. Теорема 1.3 дає, що $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $A_k \in \mathcal{P}$ неперетинні. Покладемо

$$q(x) = \mathbf{1}_B(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x).$$

Тоді q має вигляд (7.9) і

$$\|f - q\|_p = \Big(\int_{\mathsf{X}} \big|\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B\big|^p \, d\lambda\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathsf{X}} \big|\mathbf{1}_{C \Delta B}\big|^p \, d\lambda\Big)^{1/p} =$$
$$= \big(\lambda(C \Delta B)\big)^{1/p} < \varepsilon.$$

Крок 2. Нехай $f \in \mathsf{L}_p$ проста, $f = \sum_{i=1}^j c_i \mathbf{1}_{C_i}$, $C_i \in \mathcal{F}$ неперетинні, $c_i \neq 0$. Тоді

$$\int_{\mathsf{X}} |f|^p \, d\lambda = \sum_{i=1}^{j} |c_i|^p \lambda(C_i) < +\infty \overset{c_i \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda(C_i) < +\infty \Leftrightarrow \mathbf{1}_{C_i} \in \mathsf{L}_p \, .$$

Користуючись кроком 1, для кожного i візьмемо просту функцію q_i вигляду (7.9) таку, що

$$\big\|\mathbf{1}_{C_i} - q_i\big\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^j |c_i|} \, , \tag{7.10}$$

і покладемо $q = \sum_{i=1}^j c_i q_i$. Функція q, очевидно, має вигляд (7.9), і, користуючись властивостями норми, ми маємо

$$\|f - q\|_p \leq \sum_{i=1}^{j} |c_i| \big\|\mathbf{1}_{C_i} - q_i\big\|_p \overset{(7.10)}{<} \varepsilon \, .$$

Крок 3. Нехай $f \in \mathsf{L}_p$ довільна. За теоремою 7.4, знайдеться проста функція $f_0 \in \mathsf{L}_p$ така, що $\|f - f_0\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. За кроком 2 теореми, існує функція q вигляду (7.9) така, що $\|f_0 - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді $\|f - q\|_p < \varepsilon$. $\square$

У наступних наслідках ми візьмемо $\mathsf{X} = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F} = \mathcal{S}_d$, $\lambda = \lambda_d$ — міра Лебега.

Наслідок 7.1. *Простір* $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ *сепарабельний.*

Доведення. Розглянемо зліченне півкільце множин

$$\tilde{\mathcal{P}}_d = \Big\{ \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \,\Big|\, a_k,\ b_k \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

Покажемо, що зліченна множина M функцій вигляду

$$\sum_{i=1}^{j} r_i \mathbf{1}_{C_i}, \quad r_i \in \mathbb{Q}, \quad C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d, \quad j \geq 1, \tag{7.11}$$

є щільною в $\mathsf{L}_p = \mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$.

Легко бачити, що функціями з M можна як завгодно близько за нормою $\|\cdot\|_p$ наблизити будь-яку функцію вигляду

$$\sum_{i=1}^{j} c_i \mathbf{1}_{C_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d. \tag{7.12}$$

Як нескладно переконатися,

$$\sigma k\big(\tilde{\mathcal{P}}_d\big) \supset \mathcal{P}_d \Rightarrow \sigma k\big(\tilde{\mathcal{P}}_d\big) \supset \sigma k\big(\mathcal{P}_d\big) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big).$$

Із теореми 7.5 маємо, що функціями вигляду (7.12) можна як завгодно близько наблизити довільну борельову функцію з L_p.

Візьмемо довільну (не обов'язково борельову) $f \in \mathsf{L}_p$. За теоремою 7.4, f можна наблизити простою функцією $q \in \mathsf{L}_p$. Нехай

$$q = \sum_{i=1}^{n} s_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad s_i \in \mathbb{R}, \quad A_i \in \mathcal{S}_d.$$

За наслідком 2.5,

$$\exists\, B_i \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) :\ B_i \subset A_i,\ \lambda(B_i) = \lambda(A_i) \Rightarrow \mathbf{1}_{A_i} = \mathbf{1}_{B_i} \pmod{\lambda_d}.$$

Розглянемо $\tilde{q} = \sum_{i=1}^{n} s_i \mathbf{1}_{B_i}$, $\tilde{q} = q$ як елементи L_p. Як ми відмітили вище, борельову функцію $\tilde{q}$ можна як завгодно близько наближати функціями вигляду (7.12), а значить f наближається елементами M. □

Далі через $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ позначимо клас неперервних функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для яких множина $\{x \in \mathbb{R}^d :\ f(x) \neq 0\}$ обмежена. Тоді, зокрема, функція f обмежена, ми маємо

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\lambda_d = \int_{\{f \neq 0\}} |f|^p \, d\lambda_d \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \lambda_d\big(\{f \neq 0\}\big) < +\infty,$$

і тому $f \in \mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$. Зазначимо, що $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ — дійсний лінійний простір.

Наслідок 7.2. *Множина* $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ *щільна в* $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$.

Доведення. Скористаємося позначеннями з доведеннями наслідку 7.1. Оскільки множина функцій M щільна в L_p, для довільних $f \in \mathsf{L}_p$, $\varepsilon > 0$ знайдеться функція q вигляду (7.11) така, що $\|f - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Для $C = \prod_{k=1}^d (a_k, b_k]$ і $\delta > 0$ існує функція $g \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ така, що

$$g(x) = 1,\ x \in \prod_{k=1}^d [a_k + \delta, b_k - \delta], \quad g(x) = 0,\ x \notin \prod_{k=1}^d (a_k, b_k),$$

і $0 \le g(x) \le 1$. Тоді при $g \to \mathbf{1}_C$ в L_p при $\delta \to 0$.

Використовуючи запис (7.11), візьмемо

$$g_i \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d):\ \left\|\mathbf{1}_{C_i} - g_i\right\|_p < \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^j |r_i|}, \quad h = \sum_{i=1}^j r_i q_i.$$

Тоді $h \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$, $\|h - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, і тому $\|f - h\|_p < \varepsilon$. □

Вправи

Вправа 7.1. Нехай $f \in \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda) \cap \mathsf{L}_s(\mathsf{X}, \lambda)$, $1 \le p < r < s$. Довести, що $f \in \mathsf{L}_r(\mathsf{X}, \lambda)$.

Вправа 7.2. Через $\mathsf{L}_\infty = \mathsf{L}_\infty(\mathsf{X}, \lambda)$ позначимо множину класів еквівалентності функцій

$$f : \mathsf{X} \to \mathbb{R} : \quad \exists C \in \mathbb{R} : |f| \le C \pmod{\lambda}$$

(до одного класу відносимо функції, що рівні м.с.). Для $f \in \mathsf{L}_\infty$ покладемо $\|f\|_\infty$ рівним інфімуму вказаних C.

1) Довести, що $\|\cdot\|_\infty$ — норма.

2) Довести, що нормований простір $\big(\mathsf{L}_\infty, \|\cdot\|_\infty\big)$ повний.

Вправа 7.3. Нехай $0 < p < 1$, визначимо $\mathsf{L}_p = \mathsf{L}_p(\mathsf{X}, \lambda)$ як і раніше. Для f, $g \in \mathsf{L}_p$ покладемо $d(f, g) = \int_{\mathsf{X}} |f - g|^p \, d\lambda$.

1) Довести, що d — метрика на L_p.

2) Довести, що L_p — лінійний простір.

3) Довести, що метричний простір $\big(\mathsf{L}_p, d\big)$ повний.

Вправа 7.4. Нехай $f \in \mathsf{L}_p\big(\mathbb{R}^d, \lambda_d\big)$, $1 \le p < +\infty$. L_p-модулем неперервності функції f називається

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \le |t| \le \delta} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x + t) - f(x)|^p \, d\lambda_d(x)\Big)^{1/p}.$$

Довести, що $\omega_p(f, \delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Вказівки до вправ

1.1. Використовуємо рівності

$$A \setminus B = A \cap (\mathsf{X} \setminus B), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathsf{X} \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathsf{X} \setminus A_n) \Big).$$

1.2. 1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ — множина елементів X, що належать усім A_n, починаючи з деякого номера, а $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ — множина тих елементів X, що належать нескінченній кількості A_n.

2) Маємо

$$A_n \uparrow, \quad A = \bigcup_{n\ge 1} A_n \Rightarrow \bigcap_{k\ge n} A_k = A_k, \quad \bigcup_{k\ge n} A_k = A,$$
$$A_n \downarrow, \quad A = \bigcap_{n\ge 1} A_n \Rightarrow \bigcap_{k\ge n} A_k = A, \quad \bigcup_{k\ge n} A_k = A_k.$$

В усіх випадках $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = A$.

1.3. Очевидно, що $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_3 \subset a(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}_3$ замкнений відносно взяття об'єднань. Нехай

$$A,\ B \in \mathcal{H}_3, \quad A = \cup_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \cup_{i=1}^{j} B_i, \quad A_k,\ B_i \in \mathcal{H}_2.$$

Тоді

$$A_k \cap B_i \in \mathcal{H}_2, \quad A \cap B = \bigcup_{k,i} (A_k \cap B_i) \in \mathcal{H}_3,$$

і $\mathcal{H}_3$ замкнений відносно перетинів. Також

$$A_k = \bigcap_{p=1}^{q_k} A_{kp}\,,\ A_{kp} \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathsf{X} \setminus A = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathsf{X} \setminus A_k) = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{p=1}^{q_k} (\mathsf{X} \setminus A_{kp}).$$

Із визначення $\mathcal{H}_1$ випливає, що $\mathsf{X} \setminus A_{kp} \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_3$, тому $(\mathsf{X} \setminus A) \in \mathcal{H}_3$, $B \setminus A = B \cap (\mathsf{X} \setminus A) \in \mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_3$ — алгебра.

1.4. Породжений σ-адитивний клас позначимо через $\mathcal{H}$. Далі достатньо довести, що $\mathcal{H}$ замкнений відносно скінченних перетинів. Спочатку розглянемо

$$\mathcal{H}_0 = \big\{ A \in \mathcal{H} :\ A \cap E \in \mathcal{H} \text{ для всіх } E \in \mathcal{E} \big\},$$

доводимо, що це — σ-адитивний клас, який містить $\mathcal{E}$, і тому збігається з $\mathcal{H}$. Далі аналогічно доводимо, що з $\mathcal{H}$ збігається

$$\mathcal{H}_1 = \big\{ A \in \mathcal{H} :\ A \cap E \in \mathcal{H} \text{ для всіх } E \in \mathcal{H} \big\}.$$

2.1 Візьмемо $\mathcal{P} = \{(a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}$, покладемо $\lambda\big((a,b]\big) = 0,\ a > 0,\ \lambda\big((0,b]\big) = 1,\ b > 0.$

2.2 Доводимо індукцією за n.

2.3. Для неперетинних $B_k \in \mathcal{K}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{K}$, розглянемо

$$A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k, \quad A_n \in \mathcal{K}, \quad A_n \downarrow \varnothing \ \Rightarrow\ \lambda(A_n) \to 0,$$

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\big(B_k\big) + \lambda\big(A_n\big) \to \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(B_k\big),\ n \to \infty.$$

2.4. Беремо неперетинні $B_k \in \mathcal{K}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{K}$. Із невід'ємності й адитивності λ випливає її монотонність,

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \ge \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\big(B_k\big) \Rightarrow \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(B_k\big).$$

Нерівність в інший бік випливає з σ-півадитивності λ.

2.5. Доводимо аналогічно доведенню теореми 2.4.

2.6. Указана міра дорівнює $\lambda\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big)$, і для кожного $n \ge 1$ це значення не перевищує

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=n}^{\infty} \lambda\big(A_k\big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

2.7. Припускаючи, що аксіома вибору справджується, розглянемо множину B з прикладу 2.8. Якщо $\lambda(B) = 0$, ми отримаємо суперечність із (2.24). Припущення $\lambda(B) > 0$ суперечить (2.25) і тому, що $\lambda\big([-1,2]\big) \le 3.$

3.1. Безпосередньо перевіряється означення відношення еквівалентності.

3.2. Функція f борельова як неперервна, $f_n(x) = (f(x+1/n) - f(x))n$ є лінійними комбінаціями борельових, f' — поточкова границя f_n .

3.3. Лише покажемо, що для ρ справджується нерівність трикутника. Припустимо, що $\rho(f,g) + \rho(g,h) < \rho(f,h)$. Тоді

$$\exists\, \delta_1,\ \delta_2 : \quad \rho(f,g) < \delta_1, \quad \rho(g,h) < \delta_2, \quad \delta_1 + \delta_2 < \rho(f,h),$$
$$\lambda\big(\{|f-g| \ge \delta_1\}\big) < \delta_1, \quad \lambda\big(\{|g-h| \ge \delta_2\}\big) < \delta_2,$$
$$\{|f-h| \ge \delta_1 + \delta_2\} \subset \Big(\{|f-g| \ge \delta_1\} \bigcup \{|g-h| \ge \delta_2\}\Big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda\big(\{|f-h| \ge \delta_1 + \delta_2\}\big) < \delta_1 + \delta_2,$$

і ми отримали суперечність із тим, що $\rho(f,h) > \delta_1 + \delta_2$.

3.4. $\lambda\big(\{|f_n + g_n - f - g| \ge \varepsilon\}\big) \le \lambda\big(\{|f_n - f| \ge \varepsilon/2\}\big)+$ $+\lambda\big(\{|g_n - g| \ge \varepsilon/2\}\big) \to 0,\ n \to \infty$.

3.5. $f_n(x) = g_n(x) = x + 1/n,\ f(x) = g(x) = x$ на $\mathbb{R}$ із мірою Лебега.

3.6. Якщо наведене твердження невірне, то знайдуться $\varepsilon_0 > 0$ і підпослідовність $\{n_k\}$ такі, що для всіх $k \ge 1$

$$\lambda\Big(\big\{x : \big|\varphi\big(f_{n_k}(x), g_{n_k}(x)\big) - \varphi(f(x), g(x))\big| \ge \varepsilon_0\big\}\Big) \ge \varepsilon_0. \tag{7.13}$$

За теоремою Ф. Ріса, із $\{n_k\}$ можна виділити підпослідовність $\{m_k\}$ таку, що одночасно $f_{m_k} \to f,\ g_{m_k} \to g \pmod \lambda$. Із неперервності φ тоді отримуємо, що $\varphi\big(f_{m_k}, g_{m_k}\big) \to \varphi\big(f, g\big) \pmod \lambda$. Оскільки λ скінченна, звідси випливає збіжність за мірою $\varphi\big(f_{m_k}, g_{m_k}\big) \xrightarrow{\lambda} \varphi\big(f, g\big)$, і ми отримали суперечність із (7.13).

3.7. Розглянемо множини $A_{r,s} = f^{-1}((r,s]),\ r,\ s \in \mathbb{Q}$. Оскільки $A_{r,s} \in \mathcal{S}_d$, за наслідком 2.5, знайдеться борельова множина $B_{r,s} \subset A_{r,s}$, $\lambda_d\big(A_{r,s} \setminus B_{r,s}\big) = 0$. Покладемо

$$g(x) = 0,\ x \in \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} \big(A_{r,s} \setminus B_{r,s}\big), \quad g(x) = f(x) \text{ для інших } x.$$

4.1. За півадитивністю міри $\int_A f_+\, d\lambda$, маємо

$$\int_{A \cup B} f_+\, d\lambda \le \int_A f_+\, d\lambda + \int_B f_+\, d\lambda < +\infty.$$

Аналогічно показуємо, що $\int_{A \cup B} f_-\, d\lambda < +\infty$.

4.2. Міркуємо стандартним чином — спочатку доводимо для простої невід'ємної f, потім — для невід'ємної, потім — для довільної інтегровної.

4.3. Якщо X_n — множини з означення σ-скінченності для λ, то μ задовольняє це означення з множинами $\mathsf{X}_n \cap \{f \le n\}$.

4.4. Розглянемо функцію

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{1}_{\{x:\ n < f(x) \le n+1\}}(x).$$

Умова 2) означає, що $g \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda)$. Оскільки

$$g(x) \le f(x) \le g(x) + 1 \quad \text{і} \quad 1 \in \mathsf{L}(\mathsf{X}, \lambda),$$

то виконується 1)⇔2). Використовуючи рівність

$$\lambda\big(\{x :\ f(x) > n\}\big) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda\big(\{x :\ k < f(x) \le k+1\}\big),$$

перестановкою доданків ряду переконуємося, що 2)⇔3).

4.5. Розглянемо $g_n(x) = \inf_{k\le n} f_k(x)$. Тоді $0 \le g_n \le f_n \le f$,

$$g_n \uparrow f \pmod{\lambda} \Rightarrow \int_{\mathsf{X}} g_n\,d\lambda \to \int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda \Rightarrow \int_{\mathsf{X}} f_n\,d\lambda \to \int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda\,.$$

4.6. З умови маємо, що $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $g \in \mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)$ оскільки $|g| \le |f| + |h|$. Використовуючи теорему Фату, маємо

$$\int_{\mathsf{X}} g\,d\lambda - \int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda = \int_{\mathsf{X}} \underline{\lim}_{\,n\to\infty}(g_n - f_n)\,d\lambda \le$$
$$\le \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} (g_n - f_n)\,d\lambda = \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} g_n\,d\lambda - \int_{\mathsf{X}} f\,d\lambda \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int_{\mathsf{X}} g\,d\lambda \le \underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} g_n\,d\lambda\,.$$

Розглядаючи аналогічно $h - g$, отримаємо

$$\int_{\mathsf{X}} g\,d\lambda \ge \overline{\lim}_{\,n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} g_n\,d\lambda\,.$$

5.1. Візьмемо $\mathsf{X} = \mathsf{X}_+ \cup \mathsf{X}_-$ — розклад Гана заряду ν. У випадках 1) і 2) з теорем про неперервність міри маємо

$$\nu(A \cap \mathsf{X}_+) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n \cap \mathsf{X}_+), \quad -\nu(A \cap \mathsf{X}_-) = \lim_{n\to\infty} (-\nu(A_n \cap \mathsf{X}_-)).$$

Залишається відняти записані рівності.

5.2. Візьмемо $\mathsf{X}_+ = \{f \ge 0\}$, $\mathsf{X}_- = -\{f \ge 0\}$, тоді $\mathsf{X} = \mathsf{X}_+ \cup \mathsf{X}_-$ — розклад Гана заряду ν. За ним єдиним чином визначається розклад Жордана $\nu = \nu_+ - \nu_-$,

$$\nu_+(A) = \int_A f_+\,d\lambda, \quad \nu_-(A) = \int_A f_-\,d\lambda,$$
$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = \int_A |f|\,d\lambda.$$

5.3 Позначимо $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, $g = \frac{d\mu}{d\lambda}$, тоді $f,\ g \ge 0$ (див. крок 2 доведення теореми Радона — Никодима). Візьмемо прості невід'ємні $f_n \uparrow f$, $f_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} \mathbf{1}_{A_k^{(n)}}$. Використовуючи в (*) теорему 4.4, для $A \in \mathcal{F}$ маємо

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} \mu\big(A_k^{(n)} \cap A\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} \int_A g \mathbf{1}_{A_k^{(n)}}\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n g\,d\lambda \overset{(*)}{=} \int_A fg\,d\lambda\,.$$

5.4. Маємо

$$\sum_{k=1}^{n}\bigl|f(b_k)-f(a_k)\bigr| = \sum_{k=1}^{n}\Bigl|\int_{[a,b]} g\mathbf{1}_{(a_k,b_k]}\,d\lambda\Bigr| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{[a,b]} |g|\mathbf{1}_{(a_k,b_k]}\,d\lambda = \int_{[a,b]} |g|\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n}(a_k,b_k]}\,d\lambda\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\to 0 \;\Rightarrow\; |g|\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n}(a_k,b_k]} \xrightarrow{\lambda_1} 0.$$

Із наслідку 4.2 (де беремо $|g|$ як інтегровну мажоранту) випливає, що останній інтеграл при цьому прямує до нуля.

5.5. Означення 5.5 для λ_f і λ_1 справджується, якщо як множину B взяти доповнення до об'єднання всіх відрізків, на яких визначалася f у першому, другому і наступних кроках.

6.1. Нехай μ_1 скінченна на множинах $\mathsf{X}_1^{(m)}$, $\mathsf{X}_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty}\mathsf{X}_1^{(m)}$, μ_2 — скінченна на $\mathsf{X}_2^{(n)}$, $\mathsf{X}_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_2^{(n)}$. Тоді міра $\mu_1\times\mu_2$ скінченна на $\mathsf{X}_1^{(m)}\times\mathsf{X}_2^{(n)}$, $\mathsf{X}_1\times\mathsf{X}_2 = \bigcup_{1\le m,n<+\infty}\bigl(\mathsf{X}_1^{(m)}\times\mathsf{X}_2^{(n)}\bigr)$.

6.2. $A\times\{0\}$ є підмножиною $[0,1]\times\{0\}$, тобто множини міри нуль, σ-алгебра $\mathcal{S}_2$ повна, тому $A\times\{0\}\in\mathcal{S}_2$. $A\times\{0\}\notin\mathcal{S}_1\otimes\mathcal{S}_1$, оскільки x_2-переріз цієї множини при $x_2=0$ не належить $\mathcal{S}_1$.

6.3. Із теореми Тонеллі випливає

$$\int_{[0,\infty)}\lambda\bigl(\{x: f(x)>t\}\bigr)\,d\lambda_1(t) =$$

$$= \int_{[0,\infty)} d\lambda_1(t)\int_{\mathsf{X}}\mathbf{1}_{\{f(x)>t\}}(x)\,d\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathsf{X}} d\lambda(x)\int_{[0,\infty)}\mathbf{1}_{\{f(x)>t\}}(x)\,d\lambda_1(t) = \int_{\mathsf{X}} f(x)\,d\lambda(x)\,.$$

6.4. Маємо

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} f^{(-1)}\Bigl(\Bigl(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\Bigr]\Bigr)\times\Bigl(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\Bigr]\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$(\lambda\times\lambda_1)(\Gamma)=\int_{\mathsf{X}}\lambda_1\bigl(\Gamma_x\bigr)\,d\lambda(x) = \int_{\mathsf{X}}\lambda_1\bigl(\{f(x)\}\bigr)\,d\lambda(x) = 0.$$

7.1. Маємо

$$\bigl|f\mathbf{1}_{\{|f|\ge 1\}}\bigr|^r \le |f|^s,\quad |f|^s\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)\Rightarrow f\mathbf{1}_{\{|f|\ge 1\}}\in\mathsf{L}_r,$$
$$\bigl|f\mathbf{1}_{\{|f|<1\}}\bigr|^r \le |f|^p,\quad |f|^p\in\mathsf{L}(\mathsf{X},\lambda)\Rightarrow f\mathbf{1}_{\{|f|<1\}}\in\mathsf{L}_r,$$
$$f = f\mathbf{1}_{\{|f|\ge 1\}} + f\mathbf{1}_{\{|f|<1\}}\in\mathsf{L}_r.$$

7.2. 1) Спочатку відмітимо, що $|f| \le \|f\|_\infty \pmod{\lambda}$, $f \in \mathsf{L}_\infty$. Якщо це не так, то

$$0 < \lambda\big(|f| > \|f\|_\infty\big) = \lim_{n\to\infty} \lambda\big(|f| > \|f\|_\infty + 1/n\big) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists\, n_0 : \ \lambda\big(|f| > \|f\|_\infty + 1/n_0\big) > 0,$$

в означенні $\|f\|_\infty$ розглядалися б лише $C > \|f\|_\infty + \frac{1}{n_0}$, що призводить до суперечності.

Для $\|\cdot\|_\infty$ в означенні норми досить перевірити умову 3).

$$|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \pmod{\lambda} \Rightarrow \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\,.$$

2) Нехай $\|f_m - f_n\|_\infty \to 0$, $m,\, n \to \infty$. Відкинемо всі $x \in \mathsf{X}$, для яких порушується хоча б одна з нерівностей $|f_m(x) - f_n(x)| \le$ $\le \|f_m - f_n\|_\infty$. Для кожного залишеного x числова послідовність $f_n(x)$, $n \ge 1$, є фундаментальною, існує $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Для $\varepsilon > 0$ виконується

$$\exists\, n_0\ \forall\, m, n \ge n_0 : \ \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Спрямувавши $n \to \infty$, матимемо

$$|f_m(x) - f(x)| \le \varepsilon, \ m \ge n_0 \Rightarrow \|f_m - f\|_\infty \le \varepsilon, \ m \ge n_0,$$

що й означає збіжність $f_m \to f$ у L_∞.

7.3. 1) Досить перевірити нерівність трикутника для d. За допомогою похідної легко доводиться нерівність $(1+x)^p \le 1 + x^p$, $x \ge 0$, $0 < p < 1$. Звідси випливає, що $(|a| + |b|)^p \le |a|^p + |b|^p$,

$$|f-g|^p \le |f-h|^p + |h-g|^p \Rightarrow d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g).$$

2) Якщо $f, g \in \mathsf{L}_p$, то, як і в 1), отримуємо $|f+g|^p \le |f|^p + |g|^p \Rightarrow$ $\Rightarrow f + g \in \mathsf{L}_p$. Також очевидно, що $cf \in \mathsf{L}_p$, $c \in \mathbb{R}$.

3) Повторюємо доведення теореми 7.3, у якому замість нерівності $\|f-g\|_p$ беремо $d(f,g)$ і замість властивості $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ використовуємо нерівність трикутника для d.

7.4. За наслідком 7.2, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $h \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ така, що $\|f - h\|_p < \varepsilon$. Оскільки функції з $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ рівномірно неперервні й відмінні від нуля на обмеженій множині, для досить малого $\delta > 0$ і $|t| < \delta$ виконується $\|h(x+t) - h(x)\|_p < \varepsilon$. Тоді, розглядаючи x як змінну у функціях, маємо

$$\omega_p(f,\delta) = \sup_{0\le|t|\le\delta} \|f(x+t) - f(x)\|_p \le \sup_{0\le|t|\le\delta} \big(\|f(x+t) - h(x+t)\|_p + \\ + \|h(x+t) - h(x)\|_p + \|h(x) - f(x)\|_p\big) < 3\varepsilon.$$

Список літератури

[1] *Антоневич, А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения/ А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. — Минск : Университетское, 1984.

[2] *Березанский, Ю. М.* Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К. : Выща шк., 1990.

[3] *Богачев, В. И.* Основы теории меры : в 2 т. / В. И. Богачев. — 2-е изд. — М. ; Ижевск : РХД, 2006.

[4] *Богачев, В. И.* Действительный и функциональный анализ / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. — М. ; Ижевск : РХД, 2009.

[5] *Городецкий, В. В.* Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К. : Выща шк., 1990.

[6] Действительный анализ в задачах / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. — М. : Физматлит, 2005.

[7] *Дороговцев, А. Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении / А. Я. Дороговцев. — 2-е изд. — К. : Факт, 2004.

[8] *Дороговцев, А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. — 2-е изд. — К. : Факт, 2007.

[9] *Дьяченко, М. И.* Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М. : Факториал, 1998.

[10] *Кадец, В. М.* Курс функционального анализа / В. М. Кадец. — Х. : Харьковский нац. ун-т, 2006.

[11] *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — 3-е изд. — М. : Наука, 1974.

[12] *Порошкин, А. Г.* Теория меры и интеграла / А. Г. Порошкин. — 2-е изд. — М. : КомКнига, 2006.

[13] *Халмош, П.* Теория меры / П. Халмош. — М. : Факториал Пресс, 2003.

[14] *Capiński, M.* Measure, integral and probability / M. Capiński, E. Kopp. — 2nd ed. — London : Springer-Verlag, 2004.

[15] *Pap, E.* Handbook of measure theory / ed. by E. Pap. — Amsterdam : North-Holland, 2002.

[16] *Rao, M. M.* Measure theory and integration / M. M. Rao. — 2nd ed. — New York : Marcel Dekker, 2004.

[17] *Taylor, S. J.* Introduction to measure and integration / S. J. Taylor. — New York : Cambridge University Press, 1973.

[18] *Vestrup E. M.* The theory of measures and integration / E. M. Vestrup. — Hoboken, New Jersey : Wiley-Interscience, 2003.

Предметний покажчик

Зміст